Bernoulli Resolve

Matemática

6V

Volume 2

Sumário - Matemática

COMENTÁRIO E RESOLUÇÃO DE QUESTÕES

MÓDULO – A 03

Sistemas métricos e base decimal

Exercícios de Fixação

Questão 01 – Letra D

Comentário: A área total da fachada do prédio é 12 m x 20 m = 240 m². A área de cada cerâmica é 10 cm x 10 cm = 0,1 m x 0,1 m = 0,01 m². Assim, serão necessários $\frac{240\ m^2}{0{,}01\ m^2} = 2{,}4 \times 10^4 = 24\ 000$ ladrilhos para o revestimento da fachada. Como cada caixa contém 50 ladrilhos, o número **x** de caixas necessárias pode ser calculado por $x = \frac{24\ 000}{50} = 480$ caixas.

Questão 02 – Letra B

Comentário: A precipitação pluviométrica diz respeito à altura do paralelepípedo cujo volume representará a quantidade total de água precipitada. Lembrando que 1 litro equivale a 1 dm³, devemos achar o volume, em litros, do paralelepípedo de área da base 10 km² e altura 5 cm, a fim de se resolver o problema. Assim, transformando as unidades:

$1\ km = 10^4\ dm \Rightarrow 1\ km^2 = (10^4\ dm)^2 = 10^8\ dm^2$

5 cm = 0,5 dm

Agora, lembrando que o volume de um paralelepípedo é dado pelo produto da área da base pela altura:

$V = 10\ km^2 \times 5\ cm = 10 \times 10^8\ dm^2 \times 0{,}5\ dm = 5 \times 10^8\ dm^3$

Questão 03 – Letra B

Comentário: Seja N = ab um número natural, em que **a** e **b** são seus algarismos não nulos.

Foi dado que M = ba e N – M = 45. Logo:

$ab - ba = 45 \Rightarrow 10a + b - (10b + a) = 45 \Rightarrow$

$9a - 9b = 45 \Rightarrow a - b = 5$

Daí, as possibilidades para **a** e **b** são 9 e 4, 8 e 3, 7 e 2, 6 e 1.

Portanto, os possíveis valores de **N** são 4.

Questão 04 – Letra D

Comentário: Seja n = abc um número natural de 3 algarismos **a**, **b** e **c**.

Foi dado que, ao multiplicar **n** por 7, obtém-se um número terminado em 373, ou seja:

$$\begin{array}{r} a\,b\,c \\ \times \quad 7 \\ \hline \ldots 3\,7\,3 \end{array}$$

Por tentativa, temos que a única possibilidade para o valor **c** é 9.

$$\begin{array}{r} ^{(6)} \\ a\,b\,9 \\ \times \quad 7 \\ \hline \ldots 3\,7\,3 \end{array}$$

Agora, 7b + 6 tem de terminar em 7, ou seja, b = 3.

$$\begin{array}{r} ^{(2)} \\ a\,3\,9 \\ \times \quad 7 \\ \hline \ldots 3\,7\,3 \end{array}$$

Enfim, 7a + 2 tem de terminar em 3, ou seja, a = 3.

Portanto, a multiplicação pedida é:

$$\begin{array}{r} 3\,3\,9 \\ \times \quad 7 \\ \hline \ldots 3\,7\,3 \end{array}$$

Ou seja, n = 339, que é um número divisível por 3, pois a soma de seus algarismos é divisível por 3.

Questão 05 – Letra E

Comentário: Primeiramente, devemos converter milímetros cúbicos em decímetros cúbicos (litros):

$1\ mm = 10^{-2}\ dm \Rightarrow 1\ mm^3 = (10^{-2}\ dm)^3 = 10^{-6}\ dm^3$

Agora, uma regra de três simples nos dá o número total **x** de glóbulos vermelhos no corpo do indivíduo:

$$\begin{array}{lll} 5 \times 10^6 & \text{——} & 10^{-6}\ dm^3 \\ & & \qquad \Rightarrow \quad x = 2{,}75 \times 10^{13} \\ x & \text{——} & 5{,}5\ dm^3 \end{array}$$

Exercícios Propostos

Questão 06 – Letra E

Comentário: Podemos escrever **x** e **y** da forma:

$$x = 1000a_1 + 100a_2 + 10_3 + a_4$$
$$y = 1000a_4 + 100a_3 + 10a_2 + a_1$$

Temos:

$x - y = 1\,000a_1 + 100a_2 + 10a_3 + a_4 - (1\,000a_4 + 100a_3 + 10a_2 + a_1) \Rightarrow$

$x - y = 1\,000a_1 + 100a_2 + 10a_3 + a_4 - 1\,000a_4 - 100a_3 - 10a_2 - a_1 \Rightarrow$

$x - y = 999a_1 + 90a_2 - 90a_3 - 999a_4 \Rightarrow$

$x - y = 9\,(111a_1 + 10a_2 - 10a_3 - 111a_4)$

Portanto, x – y é sempre divisível por 9.

Questão 08 – Letra C

Comentário: Seja N = abc um número natural, em que **a**, **b** e **c** são seus algarismos.

Foi dado que a + c = 8 e abc – 396 = cba.

Daí, temos que:

$abc - cba = 396 \Rightarrow 100a + 10b + c - (100c + 10b + a) = 396 \Rightarrow$

$99a - 99c = 396 \Rightarrow a - c = 4$

Resolvendo o sistema $\begin{cases} a + c = 8 \\ a - c = 4 \end{cases}$, temos que a = 6 e c = 2.

Portanto, o algarismo das centenas de **N** é 6.

Questão 09 – Letra B

Comentário: Foi dado que (ab2).8 = 53ba, ou seja:

$$\begin{array}{r} \overset{(1)}{} \\ a\ b\ 2 \\ \times\ 8 \\ \hline 5\ 3\ b\ 6 \end{array}$$

Portanto, a = 6.

Sendo a = 6, temos:

$$\begin{array}{r} \overset{(5)\ (1)}{} \\ 6\ b\ 2 \\ \times\ 8 \\ \hline 5\ 3\ b\ 6 \end{array}$$

Ou seja, b = 7.

$$\text{Assim: } \begin{array}{r} \overset{(5)\ (1)}{} \\ 6\ 7\ 2 \\ \times\ 8 \\ \hline 5\ 3\ 7\ 6 \end{array}$$

Portanto, pode-se concluir que a = 6 e b = 7, e, consequentemente, a – b = 6 – 7 = –1.

Questão 10 – Letra E

Comentário: Consideremos n = ab, sendo **a** e **b** algarismos do inteiro positivo **n**. Temos:

$$n = 10a + b$$

$$n = S(n) + P(n)$$

$$10a + b = a + b + a.b \quad 9a = a.b \quad a(9 - b) = 0 \underset{a \neq 0}{} \quad 9 = b$$

Logo, o algarismo das unidades de **n** é 9.

Questão 11 – Letra A

Comentário: Foi dado o número XYZ, em que **X**, **Y** e **Z** são seus algarismos. Por hipótese, temos:

$$ZYX = XYZ + 198 \text{ (i)}$$

$$X + Y + Z = 15 \quad \text{(ii)}$$

$$ZX = 8 \quad \text{(iii)}$$

De (i), temos que:

$100Z + 10Y + X = 100X + 10Y + Z = 198 \Rightarrow$

$99Z - 99X = 198 \Rightarrow Z - X = 2 \Rightarrow Z = X + 2$ (iv)

Substituindo (iv) em (iii), temos:

$(X + 2)X = 8 \Rightarrow X^2 + 2X - 8 = 0 \Rightarrow X = 2$, pois $X > 0$

Logo, Z = 2 + 2, ou seja, Z = 4.

Assim, substituindo X = 2 e Z = 4 na equação (ii), temos que:

$2 + Y + 4 = 15 \Rightarrow Y = 9$

Portanto, o número XYZ é 294 e pertence ao intervalo compreendido entre 250 e 300.

Questão 12

Comentário: Seja n = abcd, em que **a**, **b**, **c** e **d** são seus algarismos. Por hipótese, temos:

$$a^2 + d^2 = 58 \quad \text{(i)}$$

$$b^2 + c^2 = 52 \quad \text{(ii)}$$

$$abcd - 3\,816 = dcba \text{ (iii)}$$

Da equação (i), temos que as possibilidades para **a** e **d** são:

$a_1 = 3$ e $d_1 = 7$

ou

$a_2 = 7$ e $d_2 = 3$

Da equação (ii), temos que as possibilidades para **b** e **c** são:

$b_1 = 4$ e $c_1 = 6$

ou

$b_2 = 6$ e $c_2 = 4$

Assim, os possíveis valores para **n** são:

$n_1 = 3\,467$, $n_2 = 3\,647$, $n_3 = 7\,643$ ou $n_4 = 7\,463$

Entretanto, para atender à condição (iii), temos que: n = 7 463, pois 7 463 – 3 816 = 3 647

Seção Enem

Questão 01 – Letra B

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 1

Habilidade: 3

Comentário:

a = 2 300 mm = 230 cm = 23 dm = 2,3 m.

b = 160 cm = 16 dm = 1,6 m.

Questão 02 – Letra C

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 1

Habilidade: 3

Comentário:

$6\,000 \text{ m} \cong 6\,000.3,3 \text{ pés} \cong 19\,800 \text{ pés}$.

Logo, a diferença, em pés, entre as altitudes liberadas na Finlândia e no restante do continente europeu é

31 000 – 19 800 = 11 200 pés.

Questão 03 – Letra A

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 1

Habilidade: 3

Comentário: O ponteiro indicador dos milhares está entre o 2 e o 3, ou seja, ele indica 2 milhares.

O ponteiro indicador das centenas está entre o 6 e o 7, ou seja, ele indica 6 centenas.

O ponteiro indicador das dezenas está entre o 1 e o 2, ou seja, ele indica 1 dezena.

O ponteiro indicador das unidades está entre o 4 e o 5, ou seja, ele indica 4 unidades.

Portanto, a leitura é 2 614 kWh.

Questão 04 – Letra E

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 1

Habilidade: 3

Comentário: A capacidade V_1 do Aquífero Guarani é cerca de 30 000 km³. Daí:

V_1 = 30 000.(1 000 m)³ ⇒ V_1 = 30 x 10^{12} m³ ⇒

V_1 = 30 x 10^{12} x 10^3 litros ⇒ V_1 = 30 x 10^{15} litros

A capacidade V_2 do novo reservatório de São Paulo é de 20 000 000 litros, ou seja, V_2 = 20 x 10^6 litros. Logo:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{30 \times 10^{15} \text{ litros}}{20 \times 10^6 \text{ litros}} = 1{,}5 \times 10^9$$

Portanto, V_1 = 1,5 x 10^9.V_2, ou seja, a capacidade do Aquífero Guarani é 1,5 x 10^9 vezes a capacidade do novo reservatório.

Questão 05 – Letra A

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 1

Habilidade: 3

Comentário: Na Terra, 48 ciclos de 365 dias correspondem a 48.365 = 17 520 dias.

Como cada ciclo de Vênus corresponde a 584 dias na Terra, temos que $\frac{17\,520}{584}$ = 30 ciclos.

Questão 06 – Letra D

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 1

Habilidade: 3

Comentário: Sabendo que para contar os 1 268 bois foram usadas 25 talhas, e como cada dedo da mão direita corresponde a 1 talha, temos que cada dedo dessa mão foi usado 5 vezes:

$$\frac{25 \text{ talhas}}{5 \text{ dedos}} = 5 \text{ vezes cada dedo}$$

Além disso, como cada dedo da mão esquerda corresponde a 5 talhas, temos:

$$\frac{25 \text{ talhas}}{5 \text{ talhas por dedo}} = 5 \text{ dedos usados}$$

Esse resultado equivale a usar todos os dedos da mão esquerda apenas uma vez.

Questão 07 – Letra B

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 1

Habilidade: 3

Comentário: De acordo com o enunciado, temos:

$$V_{Marte} = 3.V_{Mercúrio}$$
$$V_{Terra} = 7.V_{Marte}$$
$$V_{Netuno} = 58.V_{Terra}$$
$$V_{Júpiter} = 23.V_{Netuno}$$

Portanto, podemos concluir que:

$$V_{Júpiter} = 23.V_{Netuno} = 23.(58.V_{Terra}) = 1\,334.V_{Terra}$$

Questão 08 – Letra E

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 1

Habilidade: 3

Comentário: O diâmetro do olho humano vale 2,1 cm.

O diâmetro do espelho vale 42 m = 4 200 cm.

Logo, a razão entre o diâmeto do olho humano e o diâmetro do espelho é:

$$\frac{2{,}1 \text{ cm}}{4\,200 \text{ cm}} = \frac{1}{2\,000}$$

Portanto, 1:2 000.

MÓDULO – A 04

Médias

Exercícios de Fixação

Questão 01

Comentário: O cliente pagou R$ 18,50 quatro vezes na semana e R$ 22,00 três vezes. Assim, para encontrar a média dos valores pagos por ele, devemos calcular a média ponderada de 18,50 e 22,50, sendo que o primeiro tem peso quatro e o último peso três. Assim:

$$M = \frac{(18{,}5.4) + (22.3)}{4 + 3} = \frac{140}{7} = 20 \text{ reais}$$

Questão 02 – Letra C

Comentário: Assumindo que o preço por quilo de cada mistura de cafés é a média ponderada dos preços dos cafés I e II, em relação à quantidade destes na mistura, teremos, chamando de **x** o preço por quilo do café I e de **y** o preço por quilo do café II:

$$\frac{2x + 3y}{2 + 3} = 6{,}80 \quad 2x + 3y = 34 \text{ (I)}$$
$$\frac{3x + 2y}{3 + 2} = 8{,}20 \quad 3x + 2y = 41 \text{ (II)}$$
$$\text{(I)} + \text{(II)} \quad 5x + 5y = 75 \quad 2x + 2y = 30 \text{ (III)}$$
$$\text{(II)} - \text{(III)} \quad x = 11$$

Questão 03 – Letra D

Comentário: O peso da atleta será calculado por meio da média aritmética, que foi dada, dos pesos das 122 atletas participantes. Logo:

$$62 = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_{122}}{122} \Rightarrow 7\,564 = x_1 + x_2 + ... + x_{121} + x_{122} \text{ (I)}$$

Como uma atleta foi excluída do grupo, então a média passou a ser 61,9 kg, ou seja:

$$61{,}9 = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_{121}}{121} \Rightarrow 7\,489{,}9 = x_1 + x_2 + ... + x_{121} \text{ (II)}$$

Substituindo II em I, temos:

7 564 = 7 489,9 + x_{122} ⇒ x_{122} = 74,1

Portanto, a atleta excluída pesa 74,1 kg.

Questão 04 – Letra B

Comentário: Média harmônica:

$$H = \frac{2}{\frac{1}{60}+\frac{1}{100}} \Rightarrow H = \frac{2}{\frac{5+3}{300}} \Rightarrow H = 75$$

Portanto, a velocidade média desse veículo no percurso inteiro foi de 75 km/h.

Questão 05 – Letra C

Comentário: Chamemos de **x** o número total de pagamentos. Assim, 0,24x pagamentos foram feitos com cheque e 0,46x com cartão. O valor médio será a média ponderada do valor médio dos pagamentos em relação à quantidade destes. Observe que, como estamos calculando a média apenas para pagamentos com cartões ou cheque, a quantidade total de pagamentos será 0,24x + 0,46x = 0,7x. Assim:

$$M = \frac{0{,}24x.623 + 0{,}46x.65}{0{,}70x} = \frac{149{,}52x + 29{,}90x}{0{,}70x} \approx 256$$

Observação: A média é dada pelo quociente entre a soma de um conjunto valores e a quantidade de valores coletados. Ao calcularmos o valor médio dos pagamentos em relação à quantidade destes, estamos calculando justamente a soma dos valores que nos interessam.

Exercícios Propostos

Questão 02

Comentário: Sejam A_M e A_H as médias aritméticas das mulheres e dos homens, respectivamente, e S_M e S_H a soma das notas das mulheres e dos homens, respectivamente.

A) Assim, sendo **M** e **H**, diferentes de zero, as quantidades de mulheres e de homens na classe, respectivamente, temos que:

$$A_M = \frac{S_M}{M} \Rightarrow 7 = \frac{S_M}{M} \Rightarrow S_M = 7M \text{ (I)}$$

$$A_H = \frac{S_H}{H} \Rightarrow 6{,}2 = \frac{S_H}{H} \Rightarrow S_H = 6{,}2H \text{ (II)}$$

$$A_M + A_H = \frac{S_M + S_H}{M + H} \Rightarrow 6{,}5 = \frac{S_M + S_H}{M + H} \Rightarrow$$

$6{,}5M + 6{,}5H = S_M + S_H$ (III)

Substituindo as equações I e II na equação III, temos que:

$6{,}5M + 6{,}5H = 7M + 6{,}2H \Rightarrow 0{,}5M = 0{,}3H \Rightarrow M = 0{,}6H$

Portanto, há mais homens, pois o número de mulheres equivale a 60% do número de homens.

B) $\text{Porcentagem} = \frac{\text{parte}}{\text{todo}} = \frac{H}{M+H} = \frac{H}{0{,}6H + H} = \frac{H}{1{,}6H} \Rightarrow$

Porcentagem = 0,625 = 62,5%

Portanto, 62,5% do total de alunos da classe são do sexo masculino.

Questão 03 – Letra C

Comentário: Chamemos de S_1 a soma das notas dadas pelo primeiro conjunto de entrevistados e S_2 a soma das notas dadas na segunda etapa da pesquisa, pelos **n** entrevistados. Pela definição de média, temos:

$$M_1 = \frac{S_1}{n} \quad 7 = \frac{S_1}{1\ 000} \quad S_1 = 7\ 000$$

A média total será dada por:

$$M_t = 8 = \frac{S_1 + S_2}{1\ 000 + n} = \frac{7\ 000 + S_2}{1\ 000 + n} \text{ (I)}$$

Como a média aumentou, é imediato que ela aumentará de forma mais rápida se todos da segunda etapa derem nota 10 para o doce, ou seja, se a média das notas da segunda etapa for dez. Assim, para a hipótese de número mínimo de entrevistados na segunda etapa:

$$10 = \frac{S_2}{n} \quad S_2 = 10n \text{ (II)}$$

Substituindo II em I:

$$8 = \frac{7\ 000 + 10n}{1\ 000 + n} \quad n = 500$$

Questão 04 – Letra D

Comentário: Sendo S_{100} a soma de 100 números e S_{98} a soma de 98 números dos 100 (retirados **x** e **y**), temos:

$$\frac{S_{100}}{100} = 9{,}83 \Rightarrow S_{100} = 983$$

$$\frac{S_{98}}{98} = 8{,}5 \Rightarrow S_{98} = 833$$

$S_{100} = S_{98} + x + y \Rightarrow 983 = 833 + x + y \Rightarrow x + y = 150$

Logo, resolvendo o sistema

$$\begin{cases} x + y = 150 \\ 3x - 2y = 125 \end{cases}, \text{ temos } x = 85 \text{ e } y = 65.$$

Questão 07 – Letra D

Comentário: Foi dado que 15 dos 40 alunos de uma turma conseguiram nota máxima em uma prova valendo 100 pontos. Sendo S_{15} a soma das notas desses 15 alunos, temos que:

$S_{15} = 15.100 = 1\ 500$

Sendo 70 pontos a nota média da turma e **M** a média das notas dos alunos que não obtiveram nota máxima, temos que:

$$A = \frac{S_{15} + S_{25}}{40} \Rightarrow 70 = \frac{1\ 500 + S_{25}}{40} \Rightarrow$$

$$S_{25} = 1\ 300 \Rightarrow M = \frac{S_{25}}{25} = \frac{1\ 300}{25} \Rightarrow M = 52$$

Portanto, a média dos alunos que não obtiveram nota máxima é de 52 pontos.

Questão 08 – Letra D

Comentário: Considere **n** o número de alunos da classe. A média das notas é dada pelo quociente entre a soma das notas dos alunos e o número de alunos. Porém, a soma das notas dos alunos é a soma das notas dadas pelo professor em cada questão, já que a nota de cada aluno é a soma das notas das questões. Chamando de S_i a soma das notas em cada questão **i** ,que será o produto do número de acertos pelo valor da questão, teremos:

$S_1 = 2 \times 0{,}3n = 0{,}6n$

$S_2 = 2 \times 0{,}1n = 0{,}2n$

$S_3 = 2 \times 0{,}6n = 1{,}2n$

$S_4 = 2 \times 0{,}8n = 1{,}6n$

$S_5 = 2 \times 0{,}4n = 0{,}8n$

$$M = \frac{0{,}6n + 0{,}2n + 1{,}2n + 1{,}6n + 0{,}8n}{n} = 4{,}4$$

Questão 11 – Letra C

Comentário: Como as idades dos alunos estão sujeitas, cada uma, a um peso, que são os números de alunos, então temos de fazer uma média ponderada das idades dos alunos com seus respectivos pesos. Daí:

$$P = \frac{16.10 + 17.23 + 18.20 + 19.5 + 20.2}{10 + 23 + 20 + 5 + 2} = \frac{1\,046}{60}$$

$P \cong 17{,}4 = 17$ anos $+ 0{,}4.12$ meses

$P \cong 17$ anos e 5 meses

Portanto, a média das idades dos alunos é de, aproximadamente, 17 anos e 5 meses.

Questão 14 – Letra A

Comentário: O valor mínimo da média do número de infrações é:

$$A_{mín.} = \frac{1.7 + 4.10 + 7.15 + 10.13 + 13.5}{7 + 10 + 15 + 13 + 5} = \frac{347}{50} = 6{,}94$$

Já o valor máximo da média do número de infrações é:

$$A_{máx.} = \frac{3.7 + 6.10 + 9.15 + 12.13 + 15.5}{7 + 10 + 15 + 13 + 5} = \frac{447}{50} = 8{,}94$$

Portanto, a média do número de infrações por motorista nos últimos cinco anos, para esse grupo, está entre 6,9 e 9,0.

Questão 18

Comentário: Sejam **H** e **M** os números de homens e mulheres e S_H e S_M a soma das idades dos homens e das mulheres, respectivamente. Assim, temos:

$$40 = \frac{S_H + S_M}{120} \Rightarrow S_H + S_M = 4\,800 \text{ (I)}$$

$$35 = \frac{S_M}{M} \Rightarrow S_M = 35M \text{ (II)}$$

$$50 = \frac{S_H}{H} \Rightarrow S_H = 50H \text{ (III)}$$

Substituindo as equações II e III na equação I, temos que:
$35M + 50H = 4\,800 \Rightarrow 7M + 10H = 960$
Como temos 120 pessoas, então $M + H = 120$.

Assim, resolvendo o sistema $\begin{cases} 7M + 10H = 960 \\ M + H = 120 \end{cases}$, temos que $M = 80$ e $H = 40$, ou seja, no grupo temos 80 mulheres e 40 homens.

Questão 19– Letra D

Comentário: Considerando que a classe tem **n** alunos, haverá 0,9n homens e 0,1n mulheres, as quais tiraram, cada uma, uma nota **x**. Como a média dos homens foi 83, pela definição de média:

$$M_h = 83 = \frac{S_h}{0{,}9n} \quad S_h = 74{,}7n \text{ (I)}$$

É imediato que a soma das notas das mulheres é o produto da nota de cada uma pela quantidade destas, ou seja, $S_m = 0{,}1nx$. Assim, a média total será:

$$M_t = 84 = \frac{S_t}{n} = \frac{S_h + S_m}{n} = \frac{74{,}7n + 0{,}1nx}{n}$$
$$84n = 74{,}7n + 0{,}1nx$$
$$x = 93$$

Seção Enem

Questão 01 – Letra B

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 6

Habilidade: 25

Comentário: Como os litros de água estão sujeitos, cada um, a um peso, que são as massas dos alimentos, então temos de fazer uma média ponderada dessa água com seus respectivos pesos, ou seja:

$$p = \frac{100.1\,000 + 100.1\,500 + 100.2\,500 + 100.5\,000 + 600.17\,000}{100 + 100 + 100 + 100 + 600}$$

$$p = \frac{11\,200\,000}{1\,000} = 11\,200$$

Portanto, a média é de cerca de 11 200 litros por quilograma.

Questão 02 – Letra B

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 6

Habilidade: 25

Comentário: Como as velocidades dos veículos, em km/h, estão sujeitas a pesos, que são os percentuais de veículos, temos então uma média ponderada das velocidades com seus pesos percentuais. Daí:

$$P = \frac{20.5 + 30.15 + 40.30 + 50.40 + 60.6 + 70.3 + 80.1}{5 + 15 + 30 + 40 + 6 + 3 + 1}$$

$$P = \frac{4\,400}{100} = 44$$

Portanto, a velocidade média dos veículos que trafegam nessa avenida é de 44 km/h.

Questão 03 – Letra D

Eixo cognitivo: II

Competência de área: 6

Habilidade: 24

Comentário: A taxa média de variação da emissão de dióxido de carbono é:

$$A_1 \cong \frac{0{,}16 + 0{,}16 + 0{,}18 + 0{,}19 + 0{,}20 + 0{,}22 + 0{,}23 + 0{,}25 + 0{,}27}{9}$$

$A_1 = 0{,}206$ ppm

A taxa média de variação da produção é:

$$A_2 = \frac{0{,}1.9}{9} \Rightarrow A_2 = 0{,}1 \text{ tonelada}$$

A taxa média de variação entre a emissão de dióxido de carbono e a variação de produção é:

$$A_3 = \frac{A_1}{A_2} = \frac{0{,}206}{0{,}1} = 2{,}06 \text{ ppm/t}$$, ou seja, superior a 1,50 e inferior a 2,80.

Questão 04 – Letra D

Eixo cognitivo: II

Competência de área: 6

Habilidade: 24

Comentário: Fazendo a média dos investimentos do Brasil na França e da França no Brasil, temos:

Brasil na França:

$$A_1 = \frac{367 + 357 + 354 + 539 + 280}{5} = 379{,}4 \text{ milhões de dólares}$$

França no Brasil:

$$A_2 = \frac{825 + 485 + 1\,458 + 744 + 1\,214}{5} = 945{,}2 \text{ milhões de dólares}$$

Logo, $A_2 - A_1 = 945{,}2 - 379{,}4 = 565{,}8$ milhões de dólares.

Questão 05 – Letra C

Eixo cognitivo: II

Competência de área: 6

Habilidade: 25

Comentário: O desmatamento médio por estado em 2004 era:

$$A_{2004} = \frac{4 + 136 + 326 + 549 + 766 + 797 + 3\,463 + 7\,293 + 10\,416}{9} \Rightarrow$$

$A_{2004} \cong 2\,638{,}9 \text{ km}^2$

Considerando que até 2009 o desmatamento cresceu 10,5% em relação a 2004, essa média passou para:

$A_{2009} = A_{2004}.1{,}105 \Rightarrow A_{2009} = 2\,638{,}9.1{,}105 \Rightarrow A_{2009} \cong 2\,916 \text{ km}^2$, ou seja, valor entre 2 800 km² e 3 200 km².

Questão 06 – Letra B

Eixo cognitivo: II

Competência de área: 1

Habilidade: 2

Comentário: No quadrilátero da figura de

20 pastilhas x 10 pastilhas, temos: 40 pastilhas pretas e 160 pastilhas brancas. A razão entre o número de pastilhas pretas e brancas, respectivamente, é 1:4.

Assim, o custo por metro quadrado do revestimento será:

$$\frac{1.10{,}00 + 4.8{,}00}{5} = \text{R\$ } 8{,}40$$

MÓDULO – B 03

Equações e problemas

Exercícios de Fixação

Questão 01

Comentário: Se o tanque tem **x** litros de capacidade, ele tinha $\frac{x}{4}$ litros e $\frac{5x}{8}$ litros antes e depois da adição, respectivamente. A diferença entre essas quantidades nos dará justamente a quantidade de combustível colocada, 24 litros. Assim:

$$\frac{5x}{8} - \frac{x}{4} = 24 \quad \frac{3x}{8} = 24 \quad x = 64$$

Questão 02 – Letra A

Comentário: Sendo $S = -\frac{b}{a}$ a soma das raízes da equação $(4m + 3n)x^2 - 5nx + (m - 2) = 0$, temos:

$$\frac{5}{8} = -\frac{-5n}{4m + 3n} \Rightarrow \frac{5}{8} = \frac{5n}{4m + 3n} \Rightarrow$$

$$4m + 3n = 8n \Rightarrow m = \frac{5}{4}n \text{ (I)}$$

Sendo $P = \frac{c}{a}$ o produto dessas raízes, temos:

$$\frac{3}{32} = \frac{m - 2}{4m + 3n} \Rightarrow 3(4m + 3n) = 32(m - 2) \Rightarrow$$

$$12m + 9n = 32m - 64 \Rightarrow 20m = 9n + 64 \text{ (II)}$$

Substituindo I em II, temos:

$$20.\frac{5}{4}n = 9n + 64 \Rightarrow 25n - 9n = 64 \Rightarrow n = 4$$

Logo, $m = \frac{5}{4}.4 \Rightarrow m = 5$.

Portanto, m + n = 5 + 4 = 9.

Questão 03 – Letra C

Comentário: Chamando de **x** o custo por quilômetro pelo transporte ferroviário, o custo por quilômetro do transporte rodoviário será 2x e do transporte marítimo (x – 100). O custo total será a soma dos custos por cada meio de transporte, que são dados pelos produtos entre o custo por quilômetro do meio e a distância percorrida pelo meio. Assim:

$$700\,000 = 2\,000(x - 100) + 200x + 25.2x \Rightarrow$$

$$900\,000 = 2\,250x \Rightarrow x = 400$$

Assim, o custo por quilômetro no transporte marítimo é de 300 reais.

Questão 04 – Letra E

Comentário: Sejam **A** o número de bolas amarelas e **V** o número de bolas verdes. No primeiro caso, sobrarão (V – 1) bolas verdes e um total de (A + V – 1) bolas; no segundo caso, sobrarão (A – 9) bolas amarelas, e um total de (A + V – 9) bolas. Assim:

$$(V - 1) = \frac{A + V - 1}{5} \quad 5V - 5 = A + V - 1 \quad 4V - A = 4 \text{ (I)}$$

$$V = \frac{A + V - 9}{4} \quad 4V = A + V - 9 \quad A - 3V = 9 \text{ (II)}$$

$$V = 13 \quad \text{(I)} + \text{(II)}$$

Substituindo em I $\Rightarrow$ A = 48 $\Rightarrow$ A + V = 61

Questão 05 – Letra B

Comentário: Sendo **P** e **n** o preço e a quantidade de perfumes vendidos em dezembro, temos que P.n = 900. Em janeiro, o preço será (P – 10) e a quantidade vendida (n + 5).

Assim teremos:

(P – 10)(n + 5)= 1 000 (I). Resolvendo o sistema de duas equações e duas variáveis:

$$P.n = 900 \qquad n = \frac{900}{P} \text{ (II)}$$

Substituindo II em I:

$$(P - 10)\left(\frac{900}{P} + 5\right) = 1\,000 \qquad 5P - \frac{9\,000}{P} - 150 = 0$$

$$5P^2 - 150P - 9\,000 = 0 \qquad P^2 - 30P - 1\,800 = 0$$

$$P = 60 \text{ ou } P = -30 \text{ (não convém)}$$

Exercícios Propostos

Questão 01 – Letra E

Comentário: Sejam **E** o número total de estudantes e **D** a despesa, em reais, para organizar a festa.

Cada estudante deveria contribuir com R$ 135,00 para as despesas, ou seja: $\frac{D}{E} = 135$ (I)

Porém, 7 alunos deixaram a escola antes da arrecadação. Assim, temos (E – 7) alunos.

Como as despesas da festa permaneceram as mesmas, então os estudantes restantes teriam de pagar R$ 27,00 a mais, ou seja: $\frac{D}{E-7} = 162$ (II)

Das equações I e II, temos:

135E = 162E – 1 134 ⇒ E = 42

Substituindo E = 42 na equação I, temos D = 5 670.

No entanto, o diretor da escola contribuiu com R$ 630,00.

Logo, cada estudante participante da festa contribuirá com:

$$\frac{D - 630}{E - 7} = \frac{5\,670 - 630}{42 - 7} = \frac{5\,040}{35} = 144 \text{ reais}$$

Questão 02 – Letra E

Comentário: Sejam **L** o número de DVDs em lançamento e **C** o número de DVDs em catálogo.

Daí: L + C = 1 000 (I)

Em um determinado final de semana, temos:

$$\frac{4}{5}L + \frac{1}{5}C = 260 \Rightarrow 4L + C = 1\,300 \text{ (II)}$$

Resolvendo o sistema

$$\begin{cases} L + C = 1\,000 \\ 4L + C = 1\,300 \end{cases}, \text{ temos } L = 100 \text{ e } C = 900.$$

Portanto, o número de DVDs em catálogo locados nesse final de semana foi:

$$\frac{1}{5}C = \frac{1}{5}.900 = 180$$

Questão 05 – Letra B

Comentário: Sejam **a** e **b** os números de tapetes redondos e de tapetes retangulares, respectivamente. Marlene confeccionou 60 tapetes, sendo que o tapete redondo custa R$ 10,00, e o tapete retangular custa R$ 12,00. O lucro líquido foi de R$ 500,00, e o custo de produção foi de R$ 160,00, ou seja, o total arrecadado na venda foi R$ 660,00. Assim, montando o sistema, temos que:

$$\begin{cases} a + b = 60 \\ 10a + 12b = 660 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10a + 10b = 600 \\ 10a + 12b = 660 \end{cases} \Rightarrow a = 30 \text{ e } b = 30$$

Portanto, Marlene confeccionou nesse mês 30 tapetes redondos e 30 tapetes retangulares.

Questão 12 – Letra D

Comentário: Chamando de **n** o número de amigos e **x** o valor da conta, no primeiro caso, é arrecadado 13n, o que soma o valor da conta menos 24 reais; no segundo caso, é arrecadado 16n, o que equivale ao valor da conta mais 12 reais. Assim:

13n = x – 24 (I)

16n = x + 12 (II)

(II) – (I)

3n = 36 ⇒ n = 12

Questão 13 – Letra B

Comentário: Como **α** e **β** são raízes da equação $x^2 - kx + 6 = 0$, então a soma e o produto de suas raízes são:

$S = \alpha + \beta \Rightarrow k = \alpha + \beta$

$P = \alpha\beta \Rightarrow 6 = \alpha\beta$

Já a equação do 2º grau que admite as raízes $\alpha + 1$ e $\beta + 1$ tem como soma e produto de suas raízes os seguintes valores:

$S' = \alpha + 1 + \beta + 1 \Rightarrow S' = k + 2$

$P' = (\alpha + 1)(\beta + 1) \Rightarrow P' = \alpha\beta + \alpha + \beta + 1 \Rightarrow$

$P' = 6 + k + 1 \Rightarrow P' = k + 7$

Logo, a equação do 2º grau que tem como soma e produto de suas raízes k + 2 e k + 7, respectivamente, é $x^2 - (k + 2)x + (k + 7) = 0$.

Questão 14 – Letra B

Comentário: Perceba que $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ não está contido, de imediato, em nenhuma relação de soma ou produto entre as raízes. Porém, $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_2 + x_1}{x_1x_2} = \frac{\frac{-b}{a}}{\frac{c}{a}} = \frac{-b}{c} = \frac{-57}{-228} = \frac{1}{4}$.

MATEMÁTICA

Questão 15 – Letra C

Comentário: Chamando de **n** a quantidade de sanduíches comprada inicialmente e de **x** o preço de custo, temos n.x = 180. O total recebido foi de (n – 6).(x + 2), que expressa a quantidade de sanduíches vendidos multiplicada pelo preço de venda de cada sanduíche. Com esse dinheiro, ele comprou (n + 30) sanduíches a um preço **x**. Assim:

$$n.x = 180 \quad n = \frac{180}{x} \text{ (I)}$$

$$(n - 6)(x + 2) = (30 + n)x \quad nx + 2n - 6x - 12 = 30x + nx$$

$$2n - 12 = 36x \text{ (II)}$$

(I) em (II):

$$2.\frac{180}{x} - 12 = 36x \quad \frac{30}{x} - 1 = 3x \quad 3x^2 + x - 30 = 0$$

$$x = 3 \text{ ou } x = -\frac{10}{3} \text{ (não convém)}$$

Questão 17 – Letra D

Comentário: Seja **k** uma das raízes das equações

$$x^2 - x - a = 0$$
$$x^2 + x - (a + 20) = 0$$

Assim, substituindo **k** nas equações, temos:

$$\begin{matrix} k^2 - k - a = 0 \\ k^2 + k - (a + 20) = 0 \end{matrix} \Rightarrow 2k - 20 = 0 \Rightarrow k = 10$$

Substituindo k = 10 na equação $k^2 - k - a = 0$, temos:

$$100 - 10 - a = 0 \Rightarrow a = 90$$

Questão 18 – Letra A

Comentário: Temos de encontrar uma maneira de expressar a soma dos quadrados das raízes x_1 e x_2 em função da soma e do produto destas. Assim:

$$x_1 + x_2 = -a$$

$$x_1.x_2 = 12$$

$$(x_1 + x_2)^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$$

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = (-a)^2 - 2(12)$$

$$25 = a^2 - 24 \quad a^2 = 49 \quad a = \pm 7$$

Como a é positivo, a = 7.

Questão 19 – Letra D

Comentário: Para que o sistema de equações

$$\begin{matrix} 2x - y + 5 = 0 \\ x^2 + y - a = 0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} y = 2x + 5 \\ y = -x^2 + a \end{matrix}$$

admita apenas uma solução real, a equação do 1º grau e a equação do 2º grau só podem ter um ponto em comum, ou seja, Δ = 0. Logo, fazendo a interseção entre as equações, temos:

$$2x + 5 = -x^2 + a \Rightarrow x^2 + 2x + 5 - a = 0$$

$$\Delta = (2)^2 - 4.1(5 - a) \Rightarrow 0 = 4 - 20 + 4a \Rightarrow a = 4$$

Portanto, para a = 4 o sistema de equações admite apenas uma solução real.

Questão 20 – Letra D

Comentário: A equação $x^2 + px + q = 0$, em que **p** e **q** são reais não nulos, tem como raízes **Δ** e 1 – Δ, em que **Δ** denota o discriminante dessa raiz.

Sendo **S** a soma das raízes, temos:

$S = -p \Rightarrow \Delta + 1 - \Delta = -p \Rightarrow p = -1$

Como $\Delta = p^2 - 4.1.q$, então:

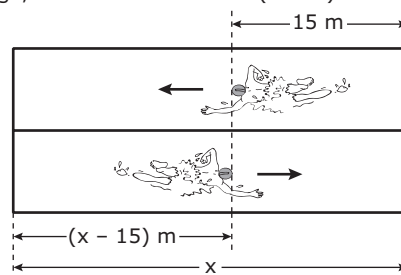
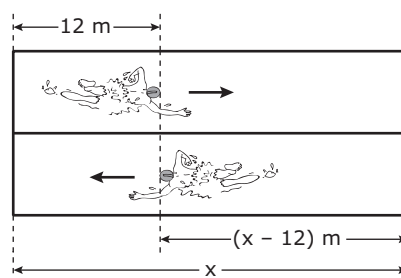
$\Delta = (-1)^2 - 4q \Rightarrow \Delta = 1 - 4q$

Daí, sendo **P** o produto das raízes, temos:

$P = q \Rightarrow \Delta(1 - \Delta) = q \Rightarrow (1 - 4q)4q = q \Rightarrow$

$1 - 4q = \frac{1}{4} \Rightarrow q = \frac{3}{16}$

Questão 25 – Letra C

Comentário: Seja **x** o comprimento da piscina. A primeira vez em que os nadadores se encontram, um está a 15 m da borda. Logo, o outro nadador está a (x – 15) m da outra borda.

Já na segunda vez em que os nadadores se encontram, um está a 12 m da outra borda, ou seja, um dos nadadores já percorreu (x + 12) m, enquanto o outro nadador já percorreu [x + (x – 12)] m.

Fazendo uma regra de três, temos que:

$$\frac{15}{x - 15} = \frac{x + 12}{x + x - 12} \Rightarrow \frac{15}{x - 15} = \frac{x + 12}{2x - 12} \Rightarrow x = 33, \text{ pois } x > 0.$$

Portanto, o comprimento da piscina é 33 m.

Seção Enem

Questão 01 – Letra E

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 1

Habilidade: 3

Comentário: Vamos calcular quanto João gastaria em cada pacote:

Pacote 1: 40.7 = 280 reais

Pacote 2: 80 + 10.7 = 150 reais

Pacote 3: 60 + 15(7 – 4) = 105 reais

Agora, para Maria:

Pacote 1: 40.4 = 160 reais

Pacote 2: 80 + 10.4 = 120 reais

Pacote 3: 60 + 15(4 – 4) = 60 reais

Então, o pacote 3 é melhor para os dois.

Questão 02 – Letra D

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 5

Habilidade: 21

Comentário: Sendo **x** o valor, em reais, da cota final para cada pessoa contribuir com as despesas **d** da festa, temos:

$$\begin{cases} d - 510 = 50(x - 7) \\ d = 55x \end{cases} \Rightarrow 55x - 510 = 50x - 350 \Rightarrow x = 32$$

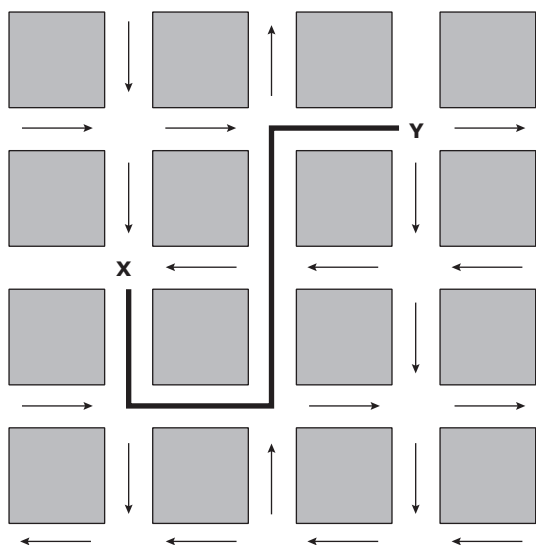
Portanto, todas as 55 pessoas contribuiram com R$ 32,00.

Questão 03 – Letra D

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 6

Habilidade: 25

Comentário: Considere a figura a seguir:

Na figura anterior, a linha indicada mostra o caminho que o ônibus percorrerá para sair do ponto **X** e chegar ao **Y**. Assim, ele percorrerá 5.200 = 1 000 m = 1 km.

Como a velocidade é 40 km/h, o tempo **t** gasto pelo ônibus será:

$$v = \frac{d}{t} \Rightarrow 40 = \frac{1}{t} \Rightarrow t = \frac{1}{40} h = 1,5 \text{ min}$$

Questão 04 – Letra B

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 1

Habilidade: 3

Comentário: Seja **t** o tempo gasto por Joana para realizar todos os exercícios, descansando conforme seu cronograma. Temos que **t** é a soma do tempo gasto fazendo as 3.6 = 18 séries, com o tempo gasto na esteira e os descansos. Então:

t = 18.0,5 + 10 + 18.1 = 37 min.

Como de 10h30min a 11h07min temos um intervalo de 37 min, Joana poderia ter feito todos os exercícios, cumprindo rigorosamente todos os intervalos programados.

Questão 05 – Letra B

Eixo cognitivo: I

Competência de área: 5

Habilidade: 19

Comentário: Sendo **m** o número de moedas de R$ 1,00 que se consegue produzir com R$ 1 000,00 e **c** o número de cédulas de R$ 1,00 que se conseguiria produzir com os mesmos R$ 1 000,00, com **m** e **c** valores inteiros, temos:

$$m = \frac{R\$ 1\,000,00}{R\$ 0,26} = 3\,846 \text{ moedas e sobram R\$ 0,04; e}$$

$$c = \frac{R\$ 1\,000,00}{R\$ 0,17} = 5\,882 \text{ cédulas e sobram R\$ 0,06.}$$

A diferença c – m é a quantidade de cédulas a mais que o Banco Central conseguiria produzir com R$ 1 000,00.

c – m = 2 036

Questão 06 – Letra C

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 1

Habilidade: 3

Comentário: De junho a dezembro de 2009, foram importados $\frac{7}{5}.9 = 12,6$ e exportados $\frac{7}{5}.11 = 15,4$ milhões de metros cúbicos de petróleo. Assim, os valores despendidos e gerados nesse período foram:

Importação: 12,6 x 10^6.340 = 4 284 milhões de dólares

Exportação: 15,4 x 10^6.230 = 3 542 milhões de dólares

Juntando aos valores referentes ao período de janeiro a maio de 2009, temos:

Importação: 4 284 + 2 840 = 7 124 milhões de dólares

Exportação: 3 542 + 2 240 = 5 782 milhões de dólares

Logo, a diferença entre esses valores é:

D = 7 124 – 5 782 = 1 342 milhão = 1,342 bilhão de dólares

Questão 07 – Letra C

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 5

Habilidade: 21

Comentário: Sabemos que para a compra dos selos de 500 folhetos do segundo tipo serão gastos R$ 725,00.

500.(0,65 + 0,60 + 0,20) = 725,00.

O restante do dinheiro será gasto apenas na compra de selos de R$ 0,65.

$$\frac{1\,000,00 - 725,00}{0,65} = \frac{275,00}{0,65} = 423 \text{ selos e sobram R\$ 0,05}$$

Assim, para saber quantos selos de R$ 0,65 foram comprados, temos de somar a quantidade desses selos comprados tanto para o primeiro tipo de folheto (423 selos) quanto para o segundo tipo de folheto (500):

500 + 423 = 923

Portanto, foram comprados 923 selos de R$ 0,65.

Questão 08 – Letra D

Eixo cognitivo: IV

Competência de área: 5

Habilidade: 22

Comentário: Sendo **x** a distância alcançada no primeiro salto, em metros, temos:

Salto	Alcance (m)
1º	x
2º	x – 12
3º	(x – 1,2) – 1,5

Para atingir a meta de 17,4 m, tem-se:

$x + (x - 1,2) + (x - 1,2 - 1,5) = 17,4 \Rightarrow 3x - 3,9 = 17,4 \Rightarrow 3x = 21,3 \Rightarrow x = 7,1$

Portanto, o alcance do primeiro salto precisa ser de 7,1 m.

MÓDULO – B 04

Razões e proporções

Exercícios de Fixação

Questão 01 – Letra D

Comentário: Observe a tabela a seguir:

Modelo	Largura (cm)	Altura (cm)	Preço (R$)	Área (cm²)	Preço/Área (R$ / cm²)
23"	50	30	750,00	1 500	1/2
32"	70	40	1 400,00	2 800	1/2
40"	90	50	2 250,00	4 500	1/2

Assim, percebemos que a razão entre a área de cada televisor e seu preço permanece constante.

Questão 02

Comentário: Sejam **x** e **y** as quantidades, em quilogramas, produzidas por José e João, respectivamente.

Logo, $\begin{matrix} x + y = 1\,500 \\ x = y + 250 \end{matrix} \quad \begin{matrix} x = 875 \\ y = 675 \end{matrix}$.

Sejam **P** e **Q** os tamanhos do terreno que José e João irão receber, respectivamente. Como a divisão dos 30 alqueires será feita de forma diretamente proporcional à produção de cada filho, temos:

$P = \frac{875}{1\,500}.30 = 17,5$ e $Q = \frac{625}{1\,500}.30 = 12,5$

Logo, José ficará com 17,5 alqueires, e João, com 12,5 alqueires.

Questão 03 – Letra B

Comentário: Chamando de **M**, **K**, **S** e **A** as quantias pagas por Marcos, Kátia, Sérgio e Ana, sabendo que estas foram proporcionais à quantidade comida por cada um, temos:

$\frac{M}{4} = \frac{S}{4} = \frac{K}{3} = \frac{A}{3}$

Usando uma das propriedades das proporções e sabendo que a soma das quantias pagas por todos é 21.2 = 42 reais:

$\frac{M}{4} = \frac{S}{4} = \frac{K}{3} = \frac{A}{3} = \frac{M+S+K+A}{4+4+3+3} = \frac{42}{14} = 3$

$M = S = 12$ e $K = A = 9$

Assim, a quantia paga por cada homem foi de 12 reais e o valor pago por cada mulher foi 9 reais.

Questão 04 – Letra B

Comentário: A fórmula estrutural da água é H_2O. O hidrogênio tem massa 1 e o oxigênio tem massa 16. Assim, uma molécula de água tem massa molecular de 2.1 + 16 = 18, e $\frac{16}{18} = \frac{8}{9}$ são devidos ao oxigênio. Assim, dos 75% de água no corpo, $\frac{8}{9}$ são de oxigênio, ou seja, o oxigênio tem $\frac{3}{4}.\frac{8}{9} = \frac{2}{3}$ de participação na massa total do corpo humano.

Questão 05 – Letra B

Comentário: A torneira 1 possui uma velocidade de enchimento igual a $v_1 = \frac{5 \text{ litros}}{12 \text{ segundos}}$, e a torneira 2, igual $v_2 = \frac{5 \text{ litros}}{18 \text{ segundos}}$.

As duas torneiras juntas encherão o tanque com uma velocidade

$v_{1,2} = v_1 + v_2 = \frac{5}{12} + \frac{5}{18} = \frac{15+10}{36} = \frac{25 \text{ litros}}{36 \text{ segundos}} \Rightarrow$

$v_{1,2} = \frac{1\,000 \text{ litros}}{1\,440 \text{ segundos}} = \frac{1\,000 \text{ litros}}{24 \text{ minutos}}$, ou seja, encherão 1 000 litros em 24 minutos.

Exercícios Propostos

Questão 01 – Letra C

Comentário: O total de sorvete de chocolate é igual a um terço do primeiro pote mais a metade do segundo pote, o que dá um total de $\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$ pote. Assim, a fração correspondente à quantidade de sorvete de chocolate comprado foi: $\frac{\frac{5}{6} \text{ pote}}{2 \text{ potes}} = \frac{5}{12}$

Questão 02 – Letra B

Comentário: Chamando de **x**, **y** e **z** as quantidades recebidas pelo três filhos e lembrando que x + y + z = 33 (I), temos:

x.2 = y.4 = z.6

Essa forma, no entanto, não é a ideal para se trabalhar, pois não há nenhuma propriedade das proporções que se encaixe nela. Assim:

$x.2 = y.4 = z.6 \qquad \frac{x}{\frac{1}{2}} = \frac{y}{\frac{1}{4}} = \frac{z}{\frac{1}{6}} = \frac{x+y+z}{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}} = \frac{33}{\frac{11}{12}} = 36$

$x = 18; \quad y = 9; \quad z = 6.$

Ou seja, o mais novo recebeu 18 reais.

Questão 05 – Letra E

Comentário: Chamando de **A**, **B** e **C** as quantidades arquivadas por Adílson, Bento e Celso, temos que:

$$24.A = 30.B = 36.C \quad \frac{A}{\frac{1}{24}} = \frac{B}{\frac{1}{30}} = \frac{C}{\frac{1}{36}}$$

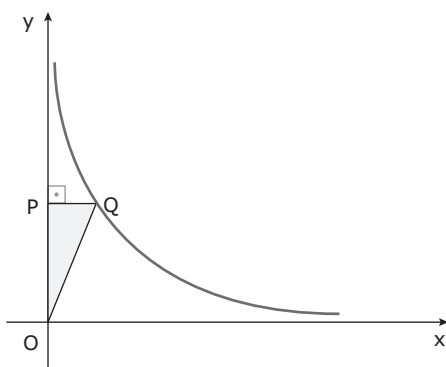
Também temos A + C – B = 26. Manipulando as expressões:

$$\frac{A}{\frac{1}{24}} = \frac{B}{\frac{1}{30}} = \frac{C}{\frac{1}{36}} = \frac{A - B + C}{\frac{1}{24} - \frac{1}{30} + \frac{1}{36}} = \frac{26}{\frac{13}{360}} = 720$$

$$A = 30,\ B = 24,\ C = 20 \quad A + B + C = 74$$

Assim, a quantidade de documentos arquivados é maior que 60.

Questão 07 – Letra D

Comentário:

Sabe-se que **x** e **y** são grandezas inversamente proporcionais. Assim, dada uma constante real **k**, temos que xy = k.

Como $\left(\frac{5}{3}, 480\right)$ é um ponto da curva definida por y = f(x), temos:

$$k = \frac{5}{3}.480 \Rightarrow k = 800$$

A área **S** do triângulo OPQ é dada por:

$$S = \frac{PQ.OP}{2}$$

Sendo Q = (x, y) um ponto da curva, concluímos que PQ = x e OP = y

$$\text{Logo: } S = \frac{xy}{2} = \frac{k}{2} = \frac{800}{2} = 400$$

Portanto, a área do triângulo OPQ vale 400.

Questão 10 – Letra B

Comentário: Foi dado que José e Jair gastam, respectivamente, 30 e 45 minutos para limpar um mesmo vestiário. Juntos, eles gastarão um tempo **T** para limpá-lo, em que:

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{30} + \frac{1}{45} \quad T = \frac{3+2}{90} = \frac{5}{90} \quad T = \frac{90}{5} = 18 \text{ minutos}$$

Portanto, José e Jair gastam 18 minutos para, juntos, lavar o vestiário.

Questão 11 – Letra A

Comentário: Com 1 litro de álcool, percorre-se 8 km.

Daí, com 0,25 L de álcool, percorre-se 0,25.8 = 2 km.

Com 1 litro de combustível gasolina + álcool, percorre-se 11 km.

Desse 1 litro, temos 0,25 L de álcool e 0,75 L de gasolina.

Com 0,25 L de álcool, é possível percorrer 2 km, e, com 0,75 L de gasolina, percorre-se 9 km.

Agora, com 0,20 L de álcool, o carro percorrerá 0,20.8 = 1,6 km.

Com 0,80 L de gasolina, o carro percorrerá:

$$\frac{0{,}80}{0{,}75}.9 = 9{,}6 \text{ km}$$

Logo, com a porcentagem de álcool de 20% e 80% de gasolina, um carro percorrerá 1,6 km + 9,6 km = 11,2 km com um litro dessa mistura.

Questão 12 – Letra C

Comentário: Sejam **x** o comprimento da peça de tecido e p_J e p_A o número de palmos de João e de Alfredo para medirem a peça de tecido. Assim:

$x = 30p_J$ e $x = 27p_A$

Igualando as equações anteriores, temos que:

$30p_J = 27p_A \Rightarrow 10p_J = 9p_A$

Portanto, 10 palmos de José equivalem a 9 palmos de Alfredo.

Questão 16

Comentário: De acordo com o exercício, temos a seguinte situação.

	Vinho (L)	Água (L)	Total (L)
Início	100	0	100
1º passo	100 – x	x	100
2º passo	$(100 - x) - \frac{100 - x}{100}x$	$x - \frac{x}{100}x + x$	100

$$\text{Daí: } (100 - x) - \frac{100 - x}{100}x = 64 \Rightarrow x^2 - 200x + 3\,600 = 0 \Rightarrow$$

x = 20 ou x = 180

Como o barril tem 100 litros, então x = 20 L, ou seja, inicialmente retiramos 20 litros de vinho do barril.

Seção Enem

Questão 01 – Letra D

Eixo cognitivo: II

Competência de área: 3

Habilidade: 11

Comentário: Pela definição de escala, temos que esta representa a razão entre a altura gráfica e a altura real. Assim, percebe-se que o tamanho real é dado pela razão entre o tamanho gráfico e a escala. Efetuando os cálculos para as 5 árvores:

I. $\frac{9}{\frac{1}{100}} = 900$ u.c

II. $\frac{9}{\frac{2}{100}} = 450$ u.c

III. $\frac{6}{\frac{2}{300}} = 900$ u.c

IV. $\frac{5}{\frac{1}{300}} = 1\ 500$ u.c

V. $\frac{5}{\frac{2}{300}} = 750$ u.c

Assim, a árvore IV é a que apresenta maior tamanho real.

Questão 02 – Letra A

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 4

Habilidade: 16

Comentário: A quantidade de gotas ministradas é diretamente proporcional à massa corporal do bebê. Assim, por uma regra de três simples:

Dosagem Massa

5 gotas —— 2 kg

30 gotas —— x

x = 12 kg

Questão 03 – Letra B

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 4

Habilidade: 16

Comentário: Representando pelo índice 1 as variáveis relacionadas à primeira parte do trajeto e pelo índice 2 as variáveis da segunda parte, e as quantidades de José, Carlos e Paulo por **J**,**C** e **P**, teremos:

$$\frac{J_1}{6} = \frac{C_1}{5} = \frac{P_1}{4}$$
$$\frac{J_2}{4} = \frac{C_2}{4} = \frac{P_2}{2} \text{ (I)}$$

Como a quantidade total de laranjas não foi alterada, teremos:

$J_1 + C_1 + P_1 = J_2 + C_2 + P_2 = n$ (II)

Substituindo II em I:

$$\frac{J_1}{6} = \frac{C_1}{5} = \frac{P_1}{4} = \frac{n}{15}$$
$$\frac{J_2}{4} = \frac{C_2}{4} = \frac{P_2}{2} = \frac{n}{10}$$

Manipulando as equações, encontramos:

$$J_1 = J_2 = \frac{2n}{5}$$
$$C_2 = \frac{2n}{5} > C_1 = \frac{n}{3}$$
$$P_1 = \frac{4n}{15} > P_2 = \frac{n}{5}$$

Assim, o único que teve a carga aumentada foi Carlos. Esse aumento vale:

$$\frac{2n}{5} - \frac{n}{3} = \frac{n}{15} = 50 \qquad n = 750$$

Substituindo o valor de **n**, encontramos:

$J_2 = C_2 = 300$ e $P_2 = 150$

Questão 04 – Letra D

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 1

Habilidade: 3

Comentário: Como ganha 20 tíquetes por rodada, a criança terá de jogar $\frac{9\ 200}{20} = 460$ vezes para conseguir a quantidade necessária de tíquetes. Como cada jogada custa 3 reais, ela gastará 3.460 = 1 380 reais para ganhar a bicicleta.

Questão 05 – Letra D

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 4

Habilidade: 16

Comentário: A escala representa a razão entre o dimensão representada e a dimensão real. Assim:

$$\text{Escala} = \frac{60 \text{ cm}}{420 \text{ km}} = \frac{0{,}6 \text{ m}}{4{,}2 \times 10^5 \text{ m}} = \frac{1}{700\ 000}$$

Questão 06 – Letra D

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 1

Habilidade: 3

Comentário: Do texto, sabemos que será necessária 1,4 milhão de colmeias nas lavouras de amêndoas da Califórnia. Como o preço de cada uma é 150 dólares, os agricultores deverão pagar:

$150.1{,}4 \times 10^6 = 210 \times 10^6$ dólares

Questão 07 – Letra C

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 4

Habilidade: 16

Comentário: O contrato inicial do funcionário determinava que ele iria ganhar R$ 120,00 por semana pela venda de R$ 600,00 semanais em produtos. Caso ele aumentasse a venda para R$ 1 200,00, sua comissão subiria para R$ 200,00, ou seja, R$ 80,00 a mais que o valor oferecido inicialmente pelo comerciante. Como o funcionário vendeu R$ 990,00 na semana, ou seja, ele superou o valor inicial em R$ 390,00, sua comissão será: $\frac{\text{R\$ } 80}{\text{R\$ } 600}$.R$ 390 = R$ 52

Portanto, o patrão pagou ao funcionário uma quantia de R$ 120 + R$ 52 = R$ 172.

Questão 08 – Letra B

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 4

Habilidade: 16

Comentário: Para percorrer 16 voltas, o carro andará uma distância de 16.7 = 112 km. Como são necessários 75 litros para percorrer 100 km, seja **c** o consumo do carro, em litros por quilômetro, e **v** o volume gasto de combustível para percorrer os 112 km. Então, temos:

$c = \frac{75 \text{ litros}}{100 \text{ km}} = 0{,}75$ L/km

v = 0,75 L/km.112 km = 84 litros

Como a densidade é de 750 g/L, a massa **m** da gasolina será:

m = 750.v = 750.84 = 63 000 g = 63 kg

Logo, o peso total do carro será 605 + 63 = 668 kg.

Questão 09 – Letra C

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 4

Habilidade: 16

Comentário: A resistência **S** da viga dada é diretamente proporcional a largura **b** e ao quadrado da altura **d** e **k** é a constante de proporcionalidade do material. Logo, $s = k.b.d^2$.

MÓDULO – C 03

Função

Exercícios de Fixação

Questão 01 – Letra C

Comentário:

A) Falso. Para x = 2 ∈ A, temos 2x = 2.2 = 4 ∉ B.

Portanto, f: x → 2x não é uma função de **A** em **B**.

B) Falso. Para x = 2 ∈ A, temos x + 1 = 2 + 1 = 3 ∉ B.

Portanto, f: x → x + 1 não é uma função de **A** em **B**.

C) Verdadeiro, pois cada elemento de **A** tem uma única imagem em **B** e, por definição de função, não é necessário que todos os elementos do contradomínio sejam imagem de algum elemento do domínio.

D) Falso. Para x = 0 ∈ B, temos $x^2 - x = 0^2 - 0 = 0 \notin A$.

Portanto, f: $x \to x^2 - x$ não é uma função de **B** em **A**.

E) Falso. Para x = 0 ∈ B, temos 0 – 1 = –1 ∉ A.

Portanto, f: x → x – 1 não é uma função de **B** em **A**.

Questão 02 – Letra A

Comentário: Temos que a norma **G** é diretamente proporcional a **m** e inversamente proporcional ao quadrado de **d**, ou seja, $G \propto \frac{m}{d^2}$.

Como G = f(d), podemos descrever a função da seguinte maneira: $f(d) = \frac{m}{d^2}$.

Dessa forma, $f(2d) = \frac{m}{(2d)^2}$ $f(2d) = \frac{m}{4d^2}$.

Então, $f(2d) = \frac{f(d)}{4}$.

Questão 03 – Letra D

Comentário: De acordo com o enunciado, temos:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 5, \text{se } x \\ 3^x, \text{se } x \end{cases}$$

Queremos encontrar os valores tais que f(x)=7. Logo, devemos igualar 7 às leis da formação da função e verificar se as soluções estão no domínio de cada lei. Logo:

$$f(x) = 7 \begin{cases} x^2 - 2x + 5 = 7 \quad x^2 - 2x - 2 = 0 \quad x = 1 \pm \sqrt{3} \text{ não convém pois x} \\ 3^x = 7 \quad \text{É imediato que } x = \log_3 7 \quad \text{. A solução convém.} \end{cases}$$

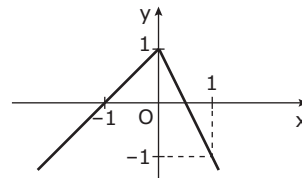
Assim, há uma solução real para f(x)=7.

Questão 04 – Letra A

Comentário: f(5x) = 5.f(x)

- fazendo x = 5 ⇒ f(25) = 5.f(5) ⇒ 75 = 5.f(5) ⇒ f(5) = 15
- fazendo x = 1 ⇒ f(5) = 5.f(1) ⇒ 15 = 5.f(1) ⇒ f(1) = 3

Questão 05 – Letra A

Comentário: Como foi dado o gráfico da função f(x), então o gráfico da função g(x) = f(x – 1) será o gráfico de f(x) deslocado uma unidade para a direita no eixo das abscissas. Assim, o gráfico da função g(x) = f(x – 1) é:

Exercícios Propostos

Questão 02 – Letra C

Comentário: Sabemos que $\frac{7}{31}$, 1 e 3,14 são racionais. Logo, $f\left(\frac{7}{31}\right) = \frac{7}{31}$, f(1) = 1, e f(3,14)= 3,14. Também temos que $\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{2}} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$, ou seja, este número é irracional.

Assim, $f(2\sqrt{3}) = \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$. Logo, o maior entre os números dados é f(3,14).

(Perceba que 3,14 ≠ π.)

Questão 08 – Letra D

Comentário:

f(x + y) = f(x) + f(y)

Fazendo x = 1 e y = 1, temos:

f(1 + 1) = 2.f(1) ⇒ = f(2) = 2.3 = 6

Questão 09 – Letra C

Comentário: Temos, pelo enunciado, que $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

Assim, $f\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\sqrt{x}}}} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{\sqrt{x}}}}$.

Como $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ $\sqrt{\sqrt{x}} = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{x}$, concluímos que

$\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{\sqrt{x}}}} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt[4]{x}}} = \sqrt[4]{x}$.

Logo, $f\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \sqrt[4]{x}$.

Questão 10 – Letra A

Comentário: Temos que uma função da forma f(x) = ax + b é crescente quando seu coeficiente angular a > 0. Manipulando a lei da função dada, encontramos que

$f(x) = (3 - 2a)x + 4$.

Assim, $3 - 2a > 0 \quad a < \frac{3}{2}$.

Questão 11 – Letra A

Comentário: Para que o produto f(x).g(x) seja negativo, é necessário que uma das funções seja negativa, e que a outra seja positiva, no mesmo intervalo de **x**. Em outras palavras, a inequação é satisfeita nos intervalos de **x** nos quais uma curva se encontra acima do eixo **x**, e a outra encontra-se abaixo do eixo **x**. Isso ocorre para 2 < x < 3 e 5 < x < 6. Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R};\ 2 < x < 3\} \cup \{x \in \mathbb{R};\ 5 < x < 6\}$.

Questão 13 – Letra D

Comentário: $y = a + \frac{b}{x}$

- Para x = −1, temos y = 0.

  $0 = a - b \Rightarrow a = b$

  Substituindo na função, temos $y = b + \frac{b}{x}$.

- Para x = 2, temos y = 3.

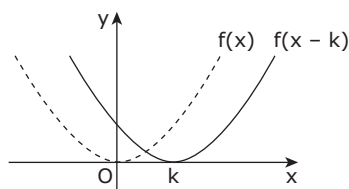
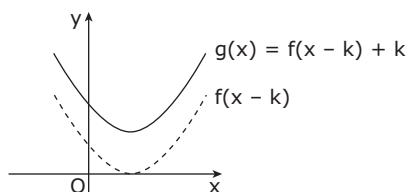
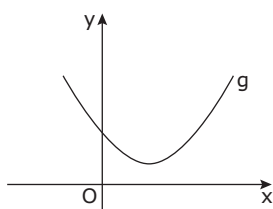
  $3 = b + \frac{b}{2} \Rightarrow 6 = 2b + b \Rightarrow b = 2$

  Logo: a = 2

  Portanto, $a^b = 2^2 = 4$.

Questão 15 – Letra E

Comentário: O gráfico da função g(x) = f(x − k) + k é obtido a partir do gráfico da função f(x) do seguinte modo:

1º passo:
Deslocamos o gráfico da função f(x) **k** unidades para a direita, obtendo, assim, o gráfico da função f(x − k).

2º passo:
Deslocamos o gráfico da função f(x − k) **k** unidades para cima, obtendo, assim, o gráfico de g(x) = f(x − k) + k.

Portanto, o gráfico correto é

Questão 17 – Letra C

Comentário: A distância total a ser percorrida, em dezenas de quilômetros, é a distância que falta ser percorrida no momento t = 0, ou seja, D(0). Pela lei da função, $D(0) = 4\ \frac{0+7}{0+1} - 1 \ = 24$.

Lembrando que essa distância é expressa em dezenas de quilômetros, a distância total a ser percorrida é 240 km. Podemos achar o tempo total do percurso fazendo D(t)=0, já que esse será o tempo em que faltará 0 km para que o percurso seja completado. Então,

$$D(t) = 0 \quad 4\ \frac{t+7}{t^2+1} - 1 \ = 0 \quad \frac{t+7}{t^2+1} = 1$$

$$t^2 - t - 6 = 0 \quad \begin{matrix} t = 3 \\ t = -2 \text{ (não convém)} \end{matrix}$$

Assim, o percurso será completado em 3 h, e o carro percorreu, em média, $\frac{240 \text{ km}}{3 \text{ h}} = 80$ km/h.

Seção Enem

Questão 01 – Letra E

Eixo cognitivo: II

Competência de área: 5

Habilidade: 20

Comentário: As grandezas consumo diário de cigarros e casos de câncer de pulmão não são diretamente proporcionais, pois o consumo de cigarros entre 1 e 14 e entre 15 e 24 faz com que os casos de câncer de pulmão permaneçam constantes.

Questão 02 – Letra D

Eixo cognitivo: I

Competência de área: 5

Habilidade: 19

Fazendo t = 0, temos $T(0) = \frac{7}{5}.0 + 20 = 20$.

Fazendo t = 100, temos $T(100) = \frac{7}{5}.100 + 20 = 160$.

Podemos concluir que, para $0 \le t < 100$, temos $20 \le T < 160$.

- A peça é colocada a 48 ºC. Temos:

$\frac{7}{5}t + 20 = 48 \Rightarrow t = 120$

Logo, passaram-se 20 minutos desde que o forno foi ligado.

- A peça será retirada a 200 ºC. Temos:

$\frac{2}{125}t^2 - \frac{16}{5}t + 320 = 200 \quad (\text{para } t \ge 100)$

$\frac{2}{125}t^2 - \frac{16}{5}t + 120 = 0$

Simplificando a equação, temos $t^2 - 200t + 7\,500 = 0$, cujas raízes são:

$t = 50$ (não convém)
$t = 150$ (convém)

O tempo de permanência da peça no fogo é igual a:

150 − 20 = 130 minutos

Questão 03 – Letra E

Eixo cognitivo: II

Competência de área: 6

Habilidade: 24

Comentário: Com base na tabela, o atleta com 1,59 m deveria pesar 58 kg. Como o seu peso é de 63 kg, ele encontra-se 5 kg acima do peso ideal. Analisando o gráfico para meia-maratona, verificamos que para cada 1 kg acima do peso ideal, o atleta perde 0,67 minutos. Portanto, com 5 kg acima do peso o atleta perde 5.0,67 = 3,35 minutos. Assim, ao perder esses 5 kg, o atleta melhoraria o seu tempo em 3,35 minutos.

Questão 04 – Letra B

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 6

Habilidade: 24

Comentário: Os IMC's de Duílio e Sandra são, respectivamente:

$$IMC = \frac{m}{h^2} = \frac{96,4}{(1,84)^2} \qquad IMC = 27,3 \text{ e}$$

$$IMC = \frac{m}{h^2} = \frac{84}{(1,70)^2} \qquad IMC = 29,1$$

Ou seja, ambos estão na categoria de sobrepeso.

MÓDULO – C 04

Função afim

Exercícios de Fixação

Questão 01 – Letra E

Comentário: O custo total é igual à soma dos custos total e variável. Assim, o custo total em função do número **x** de paletós produzidos será dado por

C(x) = 10 000 + 100x, com 0 ≤ x ≤ 500. O custo médio será $C_m(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{10\,000 + 100x}{x} = \frac{10\,000}{x} + 100s$. Assim, C_m será mínimo para **x** máximo, ou seja, x = 500.

Logo, o custo médio mínimo será $C_m = \frac{10\,000}{500} + 100 = 120$.

Questão 02 – Letra B

Comentário: Foi dado que o consumo diário de energia de Paulo, que tem entre 15 e 18 anos, é de 2 975 kcal.

Como, para meninos com a idade de Paulo, temos a função f(h) = 17h, assim:

f(h) = 17h ⇒ 2 975 = 17h ⇒ h = 175

Logo, Paulo tem 175 cm de altura.

Por hipótese, Paulo é 5 cm mais alto que sua namorada, ou seja, Carla tem 170 cm de altura.

A função g(h) = 15,3h calcula o consumo diário de energia para meninas entre 15 e 18 anos. Como Carla está nessa faixa etária e tem 170 cm de altura, então:

g(170) = 15,3.170 ⇒ g(170) = 2 601 kcal

Portanto, o consumo diário de energia de Carla é de 2 601 kcal.

Questão 03- Letra D

Comentário: O número de cricrilados a 15 °C é igual a N = 7.15 – 30 = 75. Como estes foram reduzidos pela metade, o número inicial de cricrilados era de 150, que acontecem para uma temperatura **T** tal que $150 = 7T - 30 \quad T = \frac{180}{7} \approx 26\ °C$.

Questão 04 – Letra B

Comentário: A temperatura média anual foi considerada uma função linear do tempo. Assim, a variação anual da temperatura em todo o domínio é constante e vale:

$$\alpha = \frac{y}{x} = \frac{13,8 - 13,35}{2010 - 1995} = 0,03$$

Essa variação também valerá de 2010 a 2012. Assim, a temperatura média **T** de 2012 será tal que:

$$0,03 = \frac{T - 13,8}{2012 - 2010} \qquad T = 13,86$$

Questão 05 – Letra C

Comentário: O consumo de combustível é de $\frac{40}{100} = 0,4\frac{\text{litros}}{\text{km}}$,

e o custo é de $0,4\frac{L}{km}.\frac{4 \text{ reais}}{L} = 1,6\frac{\text{real}}{km}$.

Daí, o gasto em função da distância **x** percorrida é dado por g(x) = 1,6.x + 1 150, e o lucro é dado por L(x) = 2,00.x.

Para o gasto não superar o lucro, temos:

g(x) ≤ L(x) ⇒ 1,6x + 1 150 ≤ 2x ⇒ 2 875 ≤ x

Portanto, o ônibus terá de percorrer, no mínimo, 2 875 km para que os gastos não superem o lucro.

Exercícios Propostos

Questão 01 – Letra B

Comentário: De forma geral, o lucro L(x) é dado por L(x) = R(x) – C(x), em que R(x) e C(x) expressam, respectivamente, a receita e o custo para um número **x** de unidades produzidas. Encontrando as expressões de R(x) e C(x):

R(x)= ax + b ⇒ b = 0 (interseção com o eixo y) ⇒ R(x)= ax ⇒ R(1 000) = 15 000 = 1 000a ⇒ a = 15 ⇒ R(x) = 15x

C(x)= ax + b ⇒ b = 5 000 (interseção com o eixo y) ⇒ C(x)= ax + 5 000

⇒ C(1 000) = 15 000 = 1 000a + 5 000 ⇒ a = 10 ⇒ C(x) = 10x + 5 000

A expressão de L(x) pode ser dada por:

L(x) = R(x) – C(x) = 15x – (10x + 5 000) = 5x – 5 000 ⇒ L(1 350) = 5.1 350 – 5 000 = 1 750

Questão 06 – Letra B

Comentário: Sendo **P** e **n** o preço e a quantidade de perfumes vendidos em dezembro, temos que $P.n = 900 \quad n = \frac{900}{P}$ (I). Em janeiro, o preço será (P – 10), e a quantidade vendida (n + 5). Assim, (P – 10)(n + 5) = 1 000 (II). Resolvendo o sistema de duas equações e duas variáveis, substituindo I em II, temos:

$$(P - 10)\left(\frac{900}{P} + 5\right) = 1000 \qquad 5P - \frac{9\,000}{P} - 150 = 0$$

$$5P^2 - 150P - 9\,000 = 0$$

$$P^2 - 30P - 1800 = 0 \qquad P = 60$$
$$P = -30 \text{ (não convém)}$$

Questão 07 – Letra B

Comentário: Sabe-se que o tempo gasto é igual ao quociente da distância pela velocidade média. Além disso, devemos acrescentar os 50 minutos das paradas.

Como o tempo é dado em horas, as paradas totalizam $\frac{50}{60}$ horas.

Portanto, o tempo total **t** é dado por:

$$t = \frac{x}{60} + \frac{50}{60} = \frac{x+50}{60}$$

Questão 08 – Letra B

Comentário: Para $0 \leq t \leq 60$, temos $f(t) = at + b$.

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(60) = 10 \end{cases} \quad \begin{cases} a.0 + b = 0 \\ a.60 + b = 10 \end{cases} \quad \begin{cases} a = \frac{1}{6} \\ b = 0 \end{cases}$$

Logo, $f(t) = \frac{t}{6}$, se $0 \leq t \leq 60$.

Analogamente para $60 < t \leq 120$, temos:

$$\begin{cases} f(60) = 10 \\ f(120) = 15 \end{cases} \quad \begin{cases} 60.a + b = 10 \\ 120.a + b = 15 \end{cases} \quad \begin{cases} a = \frac{1}{12} \\ b = 5 \end{cases}$$

Logo: $f(t) = \frac{t}{12} + 5$, se $60 < t \leq 120$

Portanto:

$$f(t) = \begin{cases} \frac{t}{6}, \text{ se } 0 \leq t \leq 60 \\ \frac{t}{12} + 5, \text{ se } 60 < t \leq 120 \end{cases}$$

Questão 10 – Letra C

Comentário: Chamando de A(x) e B(x) os preços cobrados pelos tradutores **A** e **B** em função do número **x** de linhas traduzidas, teremos $A(x) = 16 + 0{,}78x$ e $B(x) = 28 + 0{,}48x$. Para que o custo relativo ao tradutor **B** seja menor, devemos ter $A(x) > B(x)$, ou seja:

$$16 + 0{,}78x > 28 + 0{,}48x \Rightarrow 0{,}3x - 12 > 0 \Rightarrow x > 40$$

Como o número de linhas deve ser um número natural, a quantidade mínima será de 41 linhas.

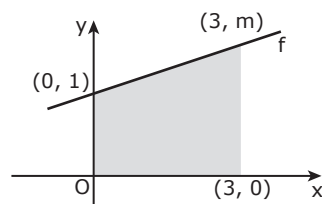
Questão 13 – Letra D

Comentário: Observe que, para valores inteiros de **x**, temos que $y = 1{,}5x + 0{,}5$.

O cliente irá estacionar por 10,5 horas. Para $x = 10$, temos $y = 1{,}5.10 + 0{,}5 = 15{,}50$.

A meia hora excedente irá aumentar em R$ 1,50 o total pago, pois a fração de hora é cobrada como uma hora. Portanto, o total pago será R$ 17,00.

Questão 14 – Letra E

Comentário: Observe a seguinte figura:

A região sombreada corresponde a um trapézio retângulo de área 12 cm². Temos:

$$A = \frac{(m+1).3}{2} \quad 12 = \frac{3m+3}{2} \quad 24 = 3(m+1) \quad m+1 = 8 \quad m = 7$$

A função **f** é da forma $f(x) = ax + b$, com $b = 1$ (interseção com o eixo **y**).

Substituindo o ponto (3, 7) na função, temos:

$$7 = a.3 + 1 \quad 3a = 6 \quad a = 2.$$

Logo, a lei que define **f** é $y = 2x + 1$.

Questão 15 – Letra D

Comentário: Vamos analisar cada uma das afirmativas:

- A afirmativa A está incorreta, pois, se o consumo for nulo, o valor pago será R$ 4,70.
- A afirmativa B está incorreta, pois, para consumos até 10 m³, paga-se o valor de R$ 4,70. Como 5 m³ encontra-se nesse intervalo, o valor pago também será R$ 4,70.
- A afirmativa C está incorreta, pois R$ 11,70 não é igual ao dobro de R$ 4,70.
- A afirmativa D está correta. Observe que, ao aumentarmos o consumo de 25 m³ para 30 m³, o valor aumenta de R$ 16,70 para R$ 34,70. Portanto, cada m³ excedente custa $\frac{34{,}70 - 16{,}70}{30 - 25} = \frac{18}{5} = 3{,}60 \frac{\text{reais}}{m^3}$. O consumidor irá pagar R$ 16,70 mais R$ 3,60 por m³ excedente.
- A afirmativa E está incorreta. Cada m³ nesse trecho custa $\frac{16{,}70 - 11{,}70}{25 - 20} = \frac{5}{5} = 1 \frac{\text{real}}{m^3}$. Portanto, 22 m³ correspondem a um valor de 11,70 + 2 = 13,70 reais.

Questão 17 – Letra D

Comentário: $y = ax + b$

Para $x = 720$, temos $y = 10 \Rightarrow 10 = a.720+b$.

Para $x = 1\,020$, temos $y = 5 \Rightarrow 5 = a.1\,020+b$.

Resolvendo o sistema $\begin{cases} 720a + b = 10 \\ 1\,020a + b = 5 \end{cases}$, temos que:

$a = -\frac{1}{60}$ e $b = 22$

Portanto: $y = -\frac{1}{60}x + 22$.

Para $y = 6$, temos $6 = -\frac{1}{60}x + 22 \Rightarrow x = 960$.

Questão 18 – Letra C

Comentário: Inicialmente, vamos encontrar a expressão da função correspondente ao sistema **B**.

p(t) = at + b

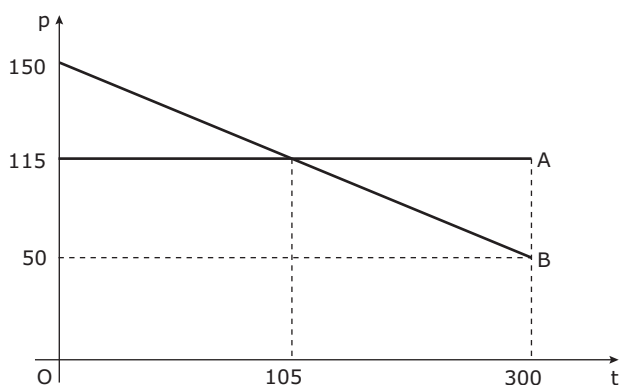
p(0) = a.0 + b = 150 ⇒ b = 150

p(300) = 50 ⇒ 300a + 150 = 50 ⇒ a = $-\frac{1}{3}$

Portanto: p(t) = $-\frac{1}{3}$t + 150

Fazendo p(t) = 115, temos:

$-\frac{1}{3}t + 150 = 115 \Rightarrow t = 105$

Desse modo, temos:

Analisando cada alternativa, temos:

- A alternativa A é correta, pois a prestação em **A** é sempre igual a R$ 115,00, ou seja, constante.
- A alternativa B é correta, pois a prestação em **B** é dada por uma função decrescente.
- A alternativa C é incorreta. Calculando o total pago em cada caso, temos:

  Sistema **A**: 300.115 = 34 500 reais

  Sistema **B**: $\frac{(150+50)300}{2}$ = 30 000 reais

Portanto, o total pago em **B** é menor que em **A**.

- A alternativa D é correta, pois a prestação em **B** torna-se menor do que em **A** a partir do 105º mês.
- A alternativa E é correta, pois o total pago em **B** é igual a R$ 30 000, ou seja, o dobro do valor da dívida contraída.

Seção Enem

Questão 01 – Letra E

Eixo cognitivo: III
Competência de área: 5
Habilidade: 21
Comentário: Observamos que, a cada aumento de 5 unidades em **x**, o valor de **y** aumenta 0,35 cm. Isso caracteriza uma variação linear, ou seja, trata-se de uma função do 1º grau da forma y = ax + b.

Para x = 5, temos y = 6,35, ou seja, 5a + b = 6,35.

Para x = 10, temos y = 6,70, ou seja, 10a + b = 6,70.

Resolvendo o sistema

$\begin{matrix} 5a+b=6,35 \\ 10a+b=6,70 \end{matrix}$, obtemos a = 0,07 e b = 6.

Logo, a função é dada por y = 0,07x + 6.

Questão 02 – Letra C

Eixo cognitivo: III
Competência de área: 5
Habilidade: 21
Comentário: Analisando o boleto, o valor a ser cobrado é dado por:
M(x) = 500 + 10 + 0,4x ⇒ M(x) = 510 + 0,4x
Observação: Convém ressaltar que a expressão anterior pressupõe que tenha havido atraso. Observe que, caso não haja atraso, ou seja, x = 0, o valor a ser pago será igual a R$ 500,00. Se substituirmos x = 0 na expressão, o valor obtido será R$ 510,00, que é incorreto. Portanto, a expressão não é válida para $x \leq 0$.

Questão 03 – Letra E

Eixo cognitivo: II
Competência de área: 5
Habilidade: 20
Comentário: Trata-se de uma função afim da forma f(x) = ax + b, sendo f(x) o número de sacolas (em bilhões) em função do número **x** de anos após 2007. Temos:

f(0) = 18 ⇒ b = 18

Rescrevendo a função, temos f(x) = ax + 18.

Além disso, f(9) = 0. Logo:

9a + 18 = 0 ⇒ a = –2

Portanto, a função é dada por f(x)= –2x + 18.

Em 2011, teremos x = 4, ou seja, f(4) = –2.4 + 18 = 10.

Logo, serão consumidas 10 bilhões de sacolas.

Questão 04 – Letra C

Eixo cognitivo: IV
Competência de área: 6
Habilidade: 26
Comentário: Consideremos o trecho do gráfico compreendido entre 2004 e 2010. Trata-se de uma função afim, f(x) = ax + b, em que f(x) é o número de favelas e **x** é o ano considerado. Sabe-se que:

$$\begin{matrix} f(2\,004)=750 \\ f(2\,010)=968 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 2\,004a+b=750 \\ 2\,010a+b=968 \end{matrix} \quad \begin{matrix} a=\frac{109}{3} \\ b=-72\,062 \end{matrix}$$

Logo, a função é dada por f(x) = $\frac{109}{3}$x – 72 062.

Em 2016, teremos:

f(2 016) = $\frac{109}{3}$.2 016 – 72 062 = 1 186

Portanto, o número de favelas em 2016 será maior do que 1 150 e menor do que 1 200.

Questão 05 – Letra B

Eixo cognitivo: II

Competência de área: 5

Habilidade: 20

Comentário: Observe que para uma conta de R$ 19,00, devemos considerar o trecho do gráfico que contém os pontos (15, 15) e (20, 25). Portanto, podemos escrever a expressão desse trecho na forma y = ax + b, em que **y** é o valor da conta em reais, e **x** é o consumo em m³. Logo:

Para x = 15, temos y = 15 $15a + b = 15$

Para x = 20, temos y = 25 $20a + b = 25$

Subtraindo as equações, temos:

$5a = 10 \Rightarrow a = 2$

$40 + b = 25 \Rightarrow b = -15$

A expressão da função é dada por y = 2x – 15.

Para y = 19, temos:

$19 = 2x - 15 \Rightarrow 2x = 34 \Rightarrow x = 17$

Portanto, o consumo foi de 17 m³.

Questão 06 – Letra B

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 5

Habilidade: 21

Comentário: Observe que o primeiro quadrado possui 4 canudos, e que, para formar cada novo quadrado, são necessários apenas 3 canudos, pois um canudo do quadrado anterior é aproveitado. Logo, serão utilizados 3 canudos por cada quadrado e mais um canudo do primeiro quadrado. A expressão equivalente é:

C = 3Q + 1

Questão 07 – Letra C

Eixo cognitivo: II

Competência de área: 6

Habilidade: 24

Comentário: Podemos considerar o gráfico como sendo de uma função afim. Portanto, há proporcionalidade entre as variações nos eixos **x** e **y**. Temos:

Variação do número de espécies	Número de anos
461 – 239 = 222	2007 – 1983 = 24
x	2011 – 2007 = 4

$\frac{222}{x} = \frac{24}{4} \Rightarrow 6x = 222 \Rightarrow x = 37$

Logo, em 2011, o número de espécies ameaçadas será igual a 461 + 37 = 498.

Questão 08 – Letra D

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 6

Habilidade: 24

Comentário: Seja **m** o número de minutos utilizados por mês em cada plano.

i) No plano **k**, temos:

$f(m) = 29{,}90;\ m \leq 200$

$f(m) = 29{,}90 + (m - 200).0{,}20;\ m > 200$

ii) No plano **z**, temos:

$f(m) = 49{,}90;\ m \leq 300$

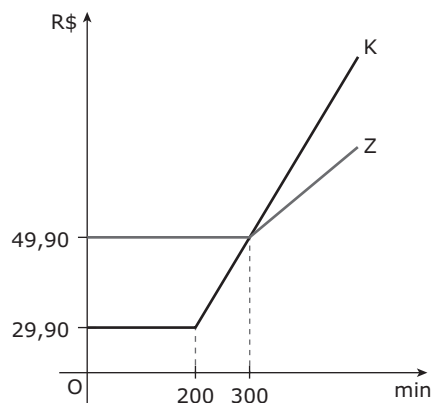
$f(m) = 49{,}90 + (m - 300).0{,}10\ ;\ m > 300$

A interseção dos gráficos, representa o mesmo valor pago em reais para ambos os planos. Logo,

$29{,}90 + (m - 200).0{,}20 = 49{,}90 + (m - 300).0{,}10$

$0{,}20m - 40 = 20 + 0{,}10m - 30$

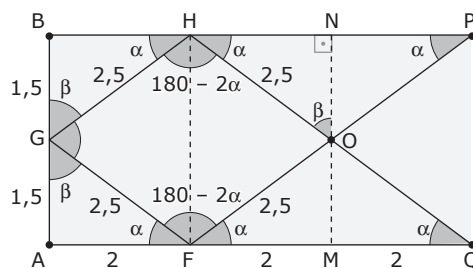
$0{,}10m = 30 \quad m = 300$

Assim, os gráficos que representam o valor pago, em reais, nos dois planos em função dos minutos utilizados são

MÓDULO – D 03

Semelhança de triângulos

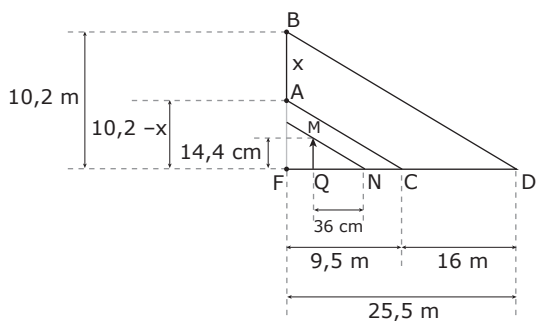
Exercícios de Fixação

Questão 01 – Letra B

Comentário: Observe a figura a seguir:

Para construí-la, com os dados inseridos nela, temos que perceber que:

- O polígono OHGF é um paralelogramo, já que seus ângulos opostos são congruentes.
- $H\hat{P}O = P\hat{F}Q$ e $F\hat{Q}H = P\hat{H}Q$, já que são alternos internos.
- Traçando-se a diagonal FH, percebemos que o triângulo FHG é isósceles, já que $G\hat{F}H = G\hat{H}F = 90 - \alpha$. Assim, GH = GF, e OHGF é um losango. Também, HO = OF.
- Os triângulos BHG e AFG, que, obviamente, são semelhantes, também são congruentes. Logo, BG = GF = 1,5 cm.
- Também pelo caso ALA, os triângulos HNO, FMO, QMO e PNO são congruentes entre si e congruentes com AFG e BHG. Logo, AF = FM = MQ = BH = HN = NP = 2 cm.
- Logo, pelo Teorema de Pitágoras, GH = GF = FO= HO = OP = OQ = 2,5 cm, e o caminho total percorrido pelo raio *laser* é de 15 cm.

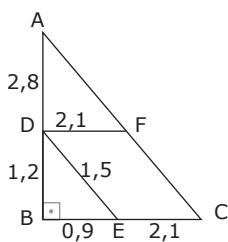
Questão 02

Comentário: Observe a figura a seguir:

Para construí-la, temos que perceber que:

- Os segmentos AC, BD e MN, que representam os raios solares, são paralelos, e logo, os triângulos MNQ, ACF e BDF são semelhantes.
- Também podemos perceber que $M\hat{N}Q = A\hat{C}F = B\hat{D}F$.

Assim, $\frac{FC}{QN} = \frac{FA}{MQ} \quad \frac{9,5}{36} = \frac{10,2 - x}{14,4} \quad x = 6,4 \text{ m}$

Questão 03 – Letra A

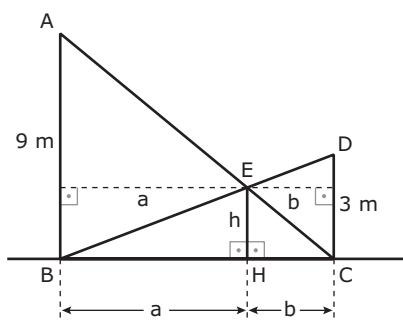
Comentário: Observe a figura a seguir:

Os triângulos ABC e DBE são semelhantes, já que $\hat{B}$ é um ângulo comum e $D\hat{E}B = A\hat{C}B$. Logo:

$$\frac{AC}{DE} = \frac{CB}{BE} = \frac{AB}{DB} \quad \frac{5}{1,5} = \frac{3}{BE} = \frac{4}{DB}$$

$BE = 0,9$ e $DB = 1,2$

Assim, EC = 2,1, e a área do paralelogramo, que é a sua altura DB multiplicada pela base EC, vale $\frac{21}{10}.\frac{6}{5} = \frac{63}{25}$.

Questão 04 – Letra D

Comentário: Considere a seguinte figura com seus dados.

Considere **a** e **b** as alturas dos triângulos AEB e DEC, respectivamente.

Como $\begin{matrix} A\hat{E}B = D\hat{E}C \\ A\hat{B}E = C\hat{D}E \\ B\hat{A}E = D\hat{C}E \end{matrix}$, então os triângulos ABE e DCE são semelhantes.

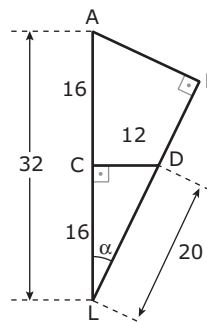
Daí: $\frac{9}{3} = \frac{a}{b} \Rightarrow a = 3b$

Como $\begin{matrix} B\hat{H}E = B\hat{C}D \\ B\hat{E}H = B\hat{D}C \\ H\hat{B}E = C\hat{B}D \end{matrix}$, então os triângulos BHE e BCD são semelhantes.

Daí: $\frac{h}{3} = \frac{a}{a+b} \Rightarrow h = \frac{3(3b)}{3b+b} \Rightarrow h = \frac{9b}{4b} \Rightarrow h = 2,25 \text{ m}$, pois $b \neq 0$

Portanto, as barras se encontram a uma altura de 2,25 m do chão.

Questão 05 – Letra B

Comentário: Como o atacante tem de percorrer uma distância mínima para pegar a bola, então essa distância é a reta. Assim, temos a seguinte figura com seus dados.

Como **C** é o ponto médio do segmento AL, então CL = 16 cm.

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo LCD, temos:

$LD^2 = LC^2 + CD^2 \Rightarrow LD^2 = 16^2 + 12^2 \Rightarrow LD = 20$

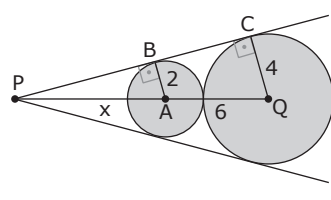
Os triângulos LCD e LBA são semelhantes pelo caso ângulo, ângulo. Daí:

$$\frac{CD}{AB} = \frac{LD}{AL} \quad \frac{12}{AB} = \frac{20}{32} \quad AB = 19,2$$

Portanto, a distância mínima que o atacante terá de percorrer para pegar a bola é o segmento AB, que vale 19,2 m.

Exercícios Propostos

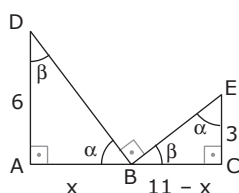
Questão 02 – Letra D

Comentário: Observe a figura a seguir:

Podemos garantir que os pontos **P**, **A** e **Q** são colineares, pois **P**, **B** e **C** são colineares e BA//CQ. Assim, os triângulos PAB e PQC são semelhantes, já que $C\hat{P}Q$ é comum e $P\hat{B}A = P\hat{C}Q$. Assim, teremos:

$$\frac{AB}{CQ} = \frac{AP}{QP} \quad \frac{2}{4} = \frac{x}{x+6} \quad x = 6$$

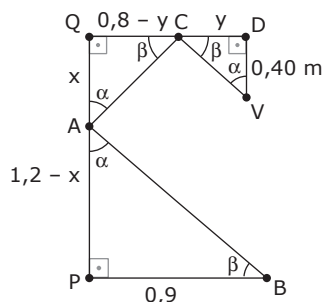
Logo, PQ=12.

Questão 06 – Letra E

Comentário: Observe a figura a seguir:

É imediato que $A\hat{D}B = C\hat{B}E$, já que $\alpha + \beta = 90°$, e, assim, os triângulos ADB e CBE são semelhantes. Logo, podemos escrever:

$$\frac{AD}{BC} = \frac{AB}{CE} \quad \frac{6}{11-x} = \frac{x}{3}$$
$$x^2 - 11x + 18 = 0 \quad x = 2 \text{ ou } x = 9$$

Questão 07

Comentário: Observe a figura a seguir:

A conformação de ângulos da figura foi feita tendo-se em conta que os ângulos de incidência e reflexão em cada colisão são iguais. Além disso, devemos lembrar que a soma dos ângulos internos de um triângulo vale 180°. Assim, os triângulos PBA, QCA e DCV são semelhantes. Logo, podemos escrever:

$$\frac{PB}{AP} = \frac{QC}{AQ} = \frac{CD}{DV}$$
$$\frac{0,9}{1,2-x} = \frac{0,8-y}{x} = \frac{y}{0,4}$$

Disso, temos:

$$\frac{0,8-y}{x} = \frac{y}{0,4} \quad xy = 0,32 - 0,4y \quad y = \frac{0,32}{0,4+x} \text{ (I)}$$

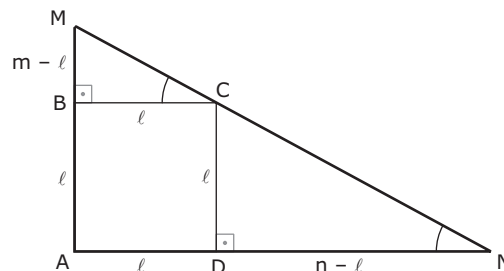
Substituindo (I) nos dois primeiros termos da proporção:

$$\frac{0,9}{1,2-x} = \frac{0,8-y}{x} \quad \frac{0,9}{1,2-x} = \frac{0,8 - \frac{0,32}{0,4+x}}{x}$$
$$\frac{0,9}{1,2-x} = \frac{0,32+0,8x-0,32}{x(0,4+x)} \quad \frac{0,9}{1,2-x} = \frac{0,8}{(0,4+x)}$$
$$0,96 - 0,8x = 0,36 + 0,9x \quad x = \frac{6}{17}\text{m}$$

Questão 08 – Letra A

Comentário: Seja ℓ a medida do lado do quadrado ABCD.

Como $\overline{AM}$ = m e $\overline{AN}$ = n, então $\overline{BM} = m - \ell$ e $\overline{DN} = n - \ell$.

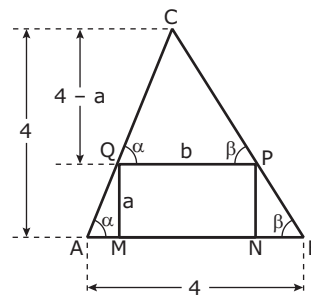
Assim, considere a seguinte figura com seus dados.

Como os triângulos MBC e CDN são semelhantes pelo caso ângulo, ângulo, então temos que:

$$\frac{m-}{} = \frac{}{n-} \Rightarrow \ell^2 = mn - m\ell - n\ell + \ell^2 \Rightarrow$$

$$\ell(m+n) = mn \Rightarrow \ell = \frac{mn}{m+n}$$

Portanto, a medida do lado do quadrado em função de **m** e **n** é $\frac{mn}{m+n}$.

Questão 10 – Letra B

Comentário: Seja o triângulo acutângulo ABC com seus respectivos dados.

Como os triângulos CQP e CAB são semelhantes pelo caso ângulo, ângulo, então temos que:

$$\frac{b}{4} = \frac{4-a}{4} \Rightarrow a + b = 4 \Rightarrow 2(a+b) = 8 \Rightarrow 2p = 8$$

Portanto, o perímetro do retângulo MNPQ é 8 cm.

Questão 12 – Letra C

Comentário: A questão poderia ser feita apenas explicitando que todas as medidas lineares correspondentes nos dois triângulos se relacionam pela razão de semelhança, que no caso, vale $\frac{1}{4}$. Porém, podemos construir esse argumento de uma forma um pouco mais sofisticada e geral, valendo para qualquer razão de semelhança **k**. Logo, chamando de **R** a razão procurada:

$$R = \frac{2p(AB'C')}{2p(ABC)} = \frac{AB' + AC' + B'C'}{AB + AC + BC} \quad (I)$$

Já que os triângulos são semelhantes:

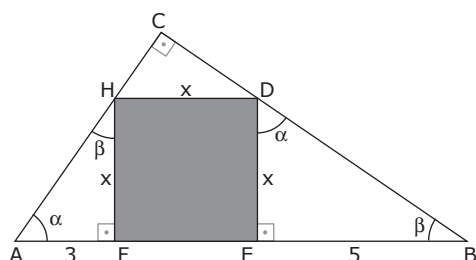
$$\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} = k$$
$$AB' = k.AB$$
$$AC' = k.AC$$
$$B'C' = k.BC$$

Substituindo em (I):

$$R = \frac{k.AB + k.AC + k.BC}{AB + AC + BC} = \frac{k.(AB + AC + BC)}{AB + AC + BC} = k$$

Logo, a razão procurada é sempre igual à razão de semelhança, que no caso vale $\frac{1}{4}$.

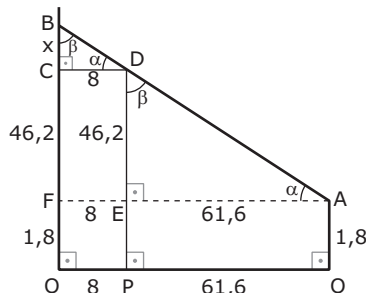
Questão 14 – Letra A

Comentário: Observe a figura a seguir:

É imediato que $C\hat{A}F = E\hat{D}B$ e $A\hat{H}F = E\hat{B}D$, já que $\alpha + \beta = 90°$. Assim, os triângulos EDB e FAH são semelhantes. Logo, chamando de **x** o lado do quadrado, podemos escrever:

$$\frac{EB}{DE} = \frac{HF}{AF} \quad \frac{5}{x} = \frac{x}{3} \quad x^2 = 15$$

Logo a área do quadrado vale 15.

Questão 16 – Letra D

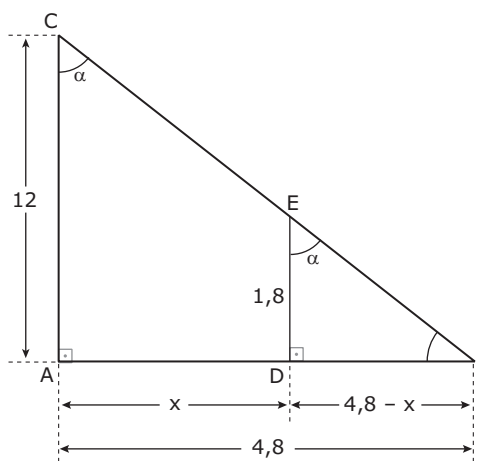
Comentário: Seja o seguinte triângulo, com seus dados, que ilustra o problema.

Seja **x** o comprimento do para-raios que o observador não consegue enxergar.

Os triângulos AED e DCB são semelhantes pelo caso ângulo, ângulo, ou seja:

$$\frac{46,2}{x} = \frac{61,6}{8} \quad x = 6$$

Portanto, o observador não consegue avistar 6 m do para-raios.

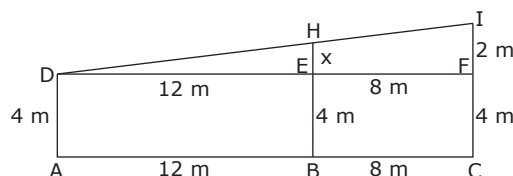
Questão 18

Comentário: Considere a seguinte figura, que ilustra o problema.

Os triângulos BDE e BAC são semelhantes pelo caso ângulo, ângulo, ou seja:

$$\frac{4,8 - x}{4,8} = \frac{1,8}{12} \quad x = 4,08$$

Portanto, uma pessoa pode ficar, no máximo, a 4,08 m da base do obelisco.

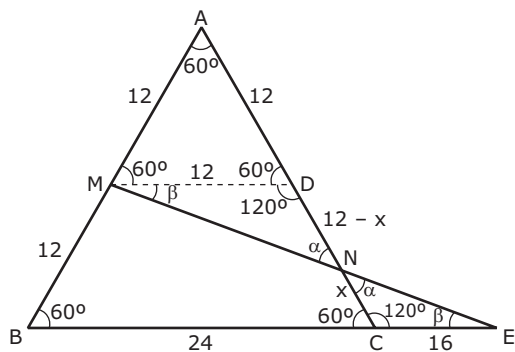
Questão 20 – Letra D

Comentário: Observe a figura a seguir:

É imediato que os triângulos DEH e DFI são semelhantes. Logo, podemos escrever:

$$\frac{DE}{DF} = \frac{HE}{IF} \quad \frac{12}{20} = \frac{x}{2} \quad x = 1,2m$$

Assim, o suporte em **B** mede 5,2 m.

Questão 23 – Letra A

Comentário: Seja a seguinte figura com seus dados.

Como o perímetro do triângulo equilátero ABC é 72 cm, então cada lado do triângulo vale 24 cm. Como **M** é ponto médio do lado AB, então AM = MB = 12. Trace o segmento MD, em que MD // BC e D $\in$ AC.

Como **M** é ponto médio de AB e MD // BC, então MD é base média do triângulo ABC, ou seja:

$$MD = \frac{BC}{2} = \frac{24}{2} = 12$$

Daí, o triângulo AMD é equilátero de lado 12 cm.

Sendo CN = x, temos que ND = 12 – x. Assim, os triângulos MDN e ECN são semelhantes pelo caso ângulo, ângulo, ou seja:

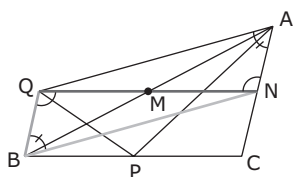
$$\frac{MD}{EC} = \frac{DN}{CN} \quad \frac{12}{16} = \frac{12-x}{x} \quad x = \frac{48}{7}$$

Portanto, o segmento CN mede, em cm, um sétimo de 48.

Questão 25 – Letra B

Comentário: Como BN é mediana, NA = NC.

Sabemos que BQ // AC com 2BQ = AC, ou seja:

$$BQ = \frac{AC}{2} = NA = NC$$

Como AN // BQ e AN = BQ, os triângulos AQN e BNQ são congruentes, pois $A\hat{N}Q = B\hat{Q}N$, AN = BQ e $N\hat{A}Q = Q\hat{B}N$ (caso ALA), AQ = BN = 10.

Como **M** e **N** são pontos médios do triângulo ABC, então MN // BC, pois MN é base média do triângulo ABC.

Como BQ = NC, então QN // BC, ou seja, QM // PC.

Logo, QP = MC = 4.

Como AP = 10, então o perímetro do triângulo APQ vale:

$2p = AQ + QP + AP \Rightarrow 2p = 10 + 4 + 8 \Rightarrow 2p = 22$

Portanto, o perímetro do triângulo APQ, em cm, vale 22.

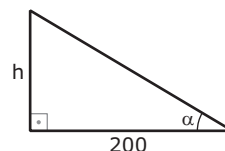
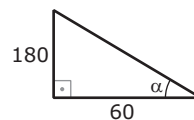
Seção Enem

Questão 01 – Letra B

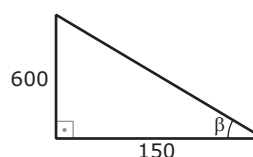
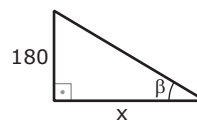
Eixo cognitivo: III

Competência de área: 2

Habilidade: 8

Comentário: No mesmo momento em que a sombra de uma pessoa de 180 cm de altura mede 60 cm, a sombra de um poste de **h** cm de altura mede 200 cm. Assim, temos as seguintes figuras.

Da semelhança de triângulos, temos que:

$$\frac{180}{h} = \frac{60}{200} \Rightarrow h = 600 \text{ cm}$$

Se, mais tarde, a sombra do poste diminuir 50 cm, ou seja, passar a medir 150 cm, sendo então **x** a medida da sombra da mesma pessoa, em cm, teremos:

$$\frac{180}{600} = \frac{x}{150} \Rightarrow x = 45 \text{ cm}$$

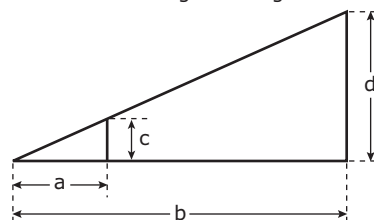
Portanto, a nova sombra da pessoa mede 45 cm.

Questão 02 – Letra D

Eixo cognitivo: IV

Competência de área: 2

Habilidade: 9

Comentário: Considere a figura a seguir com seus dados.

Por semelhança no triângulo anterior, e do enunciado, temos que:

$$\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$$

$$d = \frac{2}{3}d'$$

Logo:

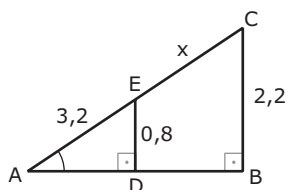
$$\frac{b}{a} = \frac{1}{c} \cdot \frac{2}{3}d' \quad \frac{b}{a} = \frac{2d'}{3c}$$

Questão 03 – Letra D

Eixo cognitivo: IV

Competência de área: 2

Habilidade: 9

Comentário: Seja o seguinte triângulo com seus dados.

Os triângulos ADE e ABC são semelhantes pelo caso ângulo, ângulo, ou seja:

$$\frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC} \Rightarrow \frac{3,2}{3,2+x} = \frac{0,8}{2,2} \Rightarrow x = 5,6$$

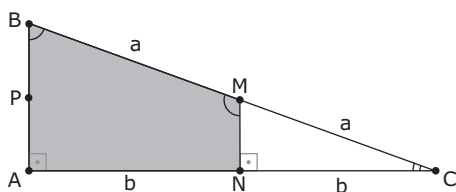
Portanto, o paciente deverá percorrer 5,6 m para atingir o ponto mais alto da rampa.

Questão 04 – Letra E

Eixo cognitivo: II

Competência de área: 2

Habilidade: 7

Comentário: Considere a figura a seguir com seus dados.

Os triângulos ABC e NMC são semelhantes e sua razão de proporcionalidade $k = \frac{BC}{MC} = 2$. Logo, a razão entre as áreas dos triângulos ABC e NMC é igual a $k^2 = 4$.

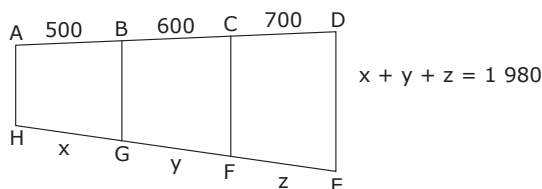
Portanto, $\frac{S_{ABMN} + S_{NMC}}{S_{NMC}} = 4 \Rightarrow S_{ABMN} = 3.S_{NMC}$.

MÓDULO – D 04

Teorema de Tales e quadriláteros

Exercícios de Fixação

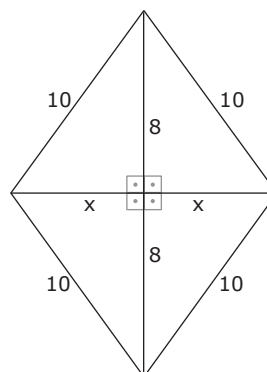
Questão 01 – Letra B

Comentário: Observe a figura a seguir:

Pelo Teorema de Tales, sabemos que os segmentos BG e CF dividem os segmentos HE e AD e segmentos proporcionais entre si. Logo:

$$\frac{AB}{HG} = \frac{BC}{GF} = \frac{CD}{FE} \quad \frac{500}{x} = \frac{600}{y} = \frac{700}{z}$$

$$\frac{500+600+700}{x+y+z} = \frac{1\,800}{1\,980} = \frac{10}{11} \quad y = 660$$

Questão 02 – Letra C

Comentário: Observe a figura a seguir:

Se o perímetro do losango, que tem todos os lados iguais, vale 40 cm, cada um de seus lados mede 10 cm. Também sabemos que as diagonais de um losango se cruzam no ponto médio de ambas, segundo um ângulo de 90°. Logo, pelo Teorema de Pitágoras, concluímos que x = 6 cm, e, portanto, a diagonal menor mede 12 cm.

Questão 03 – Letra C

Comentário: A soma dos ângulos internos de um quadrilátero é 360º. Assim, $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360º$.

Por hipótese: $\hat{C} = \frac{1}{3}\hat{B}$, $\hat{A} = 5\hat{C}$ e $\hat{D} = 45º$

Logo, podemos dizer que $\hat{B} = 3\hat{C}$.

Daí: $5\hat{C} + 3\hat{C} + \hat{C} + 45º = 360º \Rightarrow \hat{C} = 35º$

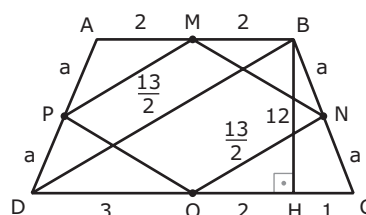
Logo, como $\hat{C} = 35º$, então:

$\hat{A} = 5\hat{C} \Rightarrow \hat{A} = 5.35º \Rightarrow \hat{A} = 175º$ e

$\hat{B} = 3C \Rightarrow \hat{B} = 3.35º \Rightarrow \hat{B} = 105º$

Portanto, $\hat{A} - \hat{B} = 175º - 105º = 70º$.

Questão 04 – Letra C

Comentário: Considere a figura a seguir com seus dados.

As diagonais de um trapézio isósceles são congruentes.

Assim, aplicando o Teorema de Pitágoras no Δ BHD, temos:

$BD^2 = BH^2 + DH^2 \Rightarrow BD^2 = 12^2 + 5^2 \Rightarrow BD = 13$

Analisando o Δ ABD, temos, por hipótese, que **M** e **P** são pontos médios dos lados AB e AD, respectivamente.

Daí, pelo Teorema da Base Média, temos:

$MP = \frac{1}{2} BD \Rightarrow MP = \frac{13}{2}$

No triângulo CBD, temos, por hipótese, que **N** e **O** são pontos médios dos lados BC e CD, respectivamente.

Daí, pelo Teorema da Base Média:

$NO = \frac{1}{2} BD \Rightarrow NO = \frac{13}{2}$

Analogamente, nos triângulos ABC e ADC, temos que MN e PO são bases médias de seus respectivos triângulos. Logo, pelo Teorema da Base Média, temos que:

$MN = \frac{1}{2} AC \Rightarrow MN = \frac{13}{2}$, pois AC = BD = 13 e

$PO = \frac{1}{2} AC \Rightarrow PO = \frac{13}{2}$

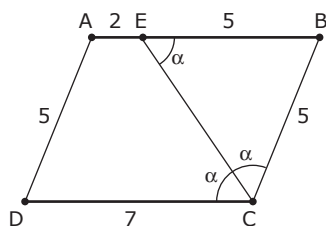
Enfim, o perímetro do quadrilátero MNOP é:

$2P = MN + NO + OP + PM \Rightarrow$

$2P = \frac{13}{2} + \frac{13}{2} + \frac{13}{2} + \frac{13}{2} \Rightarrow 2P = 26$

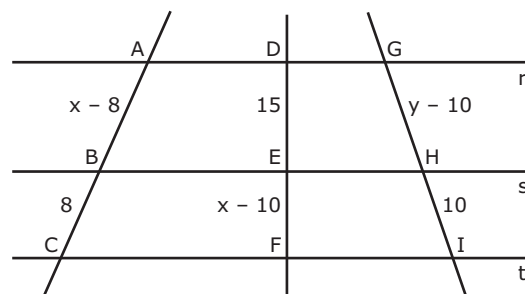
Portanto, o perímetro do quadrilátero mede 26 cm.

Questão 05 – Letra E

Comentário: Observe a figura a seguir:

Como se trata de um paralelogramo, AD = BC e AB = CD. $B\hat{E}C = D\hat{C}E$, pois são alternos internos. Assim, o triângulo BEC é isósceles, EB = 5 e AB = DC = 7. Com esses dados, conclui-se que, o perímetro do paralelogramo mede 24 cm.

Exercícios Propostos

Questão 02 – Letra B

Comentário: Seja a seguinte figura com seus dados.

Como temos três retas **r**, **s** e **t** paralelas interceptadas por três retas $\overleftrightarrow{DF}$, $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{GI}$, então, aplicando o Teorema de Tales, temos que:

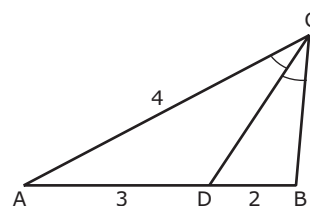
$\frac{x-8}{8} = \frac{15}{x-10} = \frac{y-10}{10}$

Daí: $\frac{x-8}{8} = \frac{15}{x-10} \Rightarrow x = 20$, pois $x > 0$

Logo: $\frac{15}{20-10} = \frac{y-10}{10} \Rightarrow y = 25$

Portanto, x + y = 20 + 25 = 45, que está entre 41 e 46.

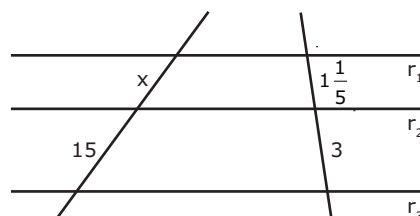
Questão 04 – Letra D

Comentário: Seja a seguinte figura com seus dados.

Como CD é bissetriz do ângulo interno $\hat{C}$, então, aplicando o Teorema da Bissetriz Interna, temos que:

$\frac{CA}{AD} = \frac{CB}{BD}$ $\frac{4}{3} = \frac{CB}{2}$ $CB = \frac{8}{3}$

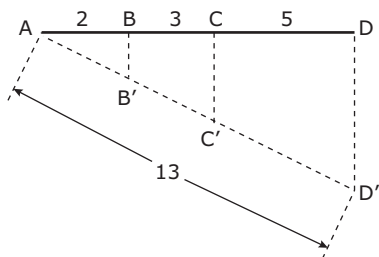
Portanto, BC mede $\frac{8}{3}$ cm.

Questão 05 – Letra E

Comentário: Seja a seguinte figura com seus dados.

Como as retas r_1, r_2 e r_3 são paralelas e estão sendo interceptadas por duas retas, então, aplicando o Teorema de Tales, temos que:

$\frac{x}{15} = \frac{1\frac{1}{5}}{3}$ $\frac{x}{15} = \frac{\frac{6}{5}}{3}$ $\frac{x}{15} = \frac{2}{5}$ $x = 6$

Questão 07

Comentário: Considere a figura a seguir com seus dados.

Temos três retas paralelas cortadas por duas transversais. Daí, aplicando o Teorema de Tales, temos:

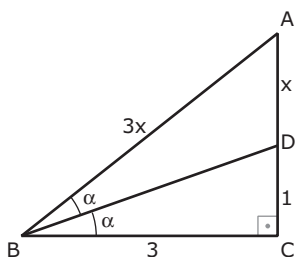
$$\frac{AB'}{AD'} = \frac{AB}{AD} \quad \frac{AB'}{13} = \frac{2}{10} \quad AB' = 2{,}6 \text{ cm}$$

$$\frac{B'C'}{AD'} = \frac{BC}{AD} \quad \frac{B'C'}{13} = \frac{3}{10} \quad B'C' = 3{,}9 \text{ cm}$$

$$\frac{C'D'}{AD'} = \frac{CD}{AD} \quad \frac{C'D'}{13} = \frac{5}{10} \quad C'D' = 6{,}5 \text{ cm}$$

Portanto, AB′ = 2,6 cm, B′C′ = 3,9 cm e C′D′ = 6,5 cm.

Questão 08

Comentário: Seja a seguinte figura com seus dados.

Como BD é bissetriz do ângulo interno **B**, aplicando o Teorema da Bissetriz Interna, temos que:

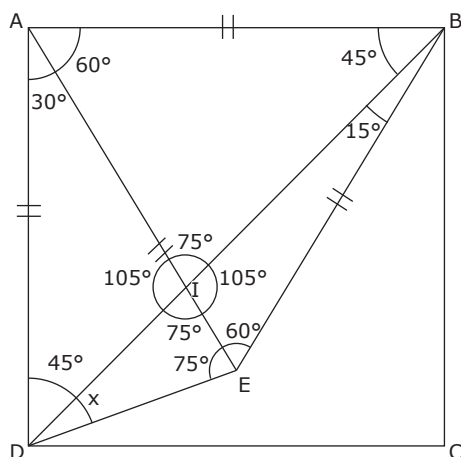
$$\frac{BA}{AD} = \frac{BC}{CD} \quad \frac{BA}{x} = \frac{3}{1} \quad BA = 3x$$

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo ABC, temos que:

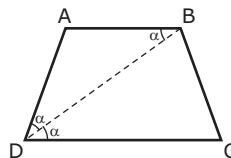
$AB^2 = CB^2 + CA^2 \Rightarrow (3x)^2 = (3)^2 + (x + 1)^2 \Rightarrow$

$4x^2 - x - 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{4}$, pois $x > 0$

Questão 11 – Letra D

Comentário: Observe a figura a seguir:

Observe que, como AB é lado tanto do quadrado como do triângulo equilátero, AB = BE = AE = AD = CD = BC. Assim, o triângulo ADE é isósceles, e como $E\hat{A}B = 60°$, $D\hat{A}E = 30°$. Logo, $A\hat{D}E = A\hat{E}D = 75°$. Como ADI = 45°, BDE = 30°.

Questão 14 – Letra B

Comentário: Seja o trapézio isósceles ABCD.

Traçando sua diagonal BD, temos, por hipótese, que $A\hat{D}B = C\hat{D}B$, pois BD é bissetriz do ângulo $A\hat{D}C$.

Sendo $\alpha = A\hat{D}B = C\hat{D}B$, temos que $A\hat{B}D = C\hat{D}B = \alpha$, pois esses ângulos são alternos internos.

Logo, o triângulo ABD é isósceles, pois $A\hat{B}D = A\hat{D}B = \alpha$.

Assim, AB = AD, ou seja, a base menor do trapézio isósceles ABCD tem a mesma medida do lado oblíquo.

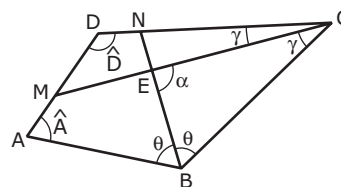
Analogamente, traçando a diagonal AC, temos que AB = BC.

Portanto, a base menor do trapézio isósceles ABCD tem a mesma medida dos lados oblíquos.

Questão 15 – Letra D

Comentário: Como BN é bissetriz do ângulo $A\hat{B}C$, então temos que $A\hat{B}N = C\hat{B}N$. Seja $A\hat{B}N = C\hat{B}N = \theta$.

Como CM é bissetriz do ângulo DCB, então temos que $D\hat{C}M = B\hat{C}M$. Seja $D\hat{C}M = B\hat{C}M = \gamma$.

Temos, pois, a seguinte figura:

Sejam $B\hat{A}D = \hat{A}$, $C\hat{D}A = \hat{D}$ e $E = BN \cap CM$.

Do triângulo BCE, temos que:

$\theta + \gamma + \alpha = 180° \Rightarrow \theta + \gamma = 180° - \alpha$ (I)

Do quadrilátero ABCD, temos que:

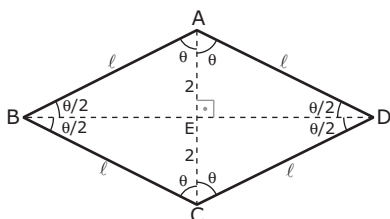
$\hat{A} + 2\theta + 2\gamma + \hat{D} = 360° \Rightarrow \hat{A} + \hat{D} = 360° - 2(\theta + \gamma)$ (II)

Substituindo a equação (I) na equação (II), temos que:

$\hat{A} + \hat{D} = 360° - 2(180° - \alpha) \Rightarrow \hat{A} + \hat{D} = 2\alpha$

Portanto, a soma dos ângulos internos **A** e **D** vale 2α.

Questão 18 – Letra D

Comentário: Como as diagonais de um losango são bissetrizes dos ângulos internos e são perpendiculares, então temos a seguinte figura com seus dados.

Sejam AC ∩ BD = E e ℓ o lado do losango.

Do triângulo ADE, temos que:

$$\theta + \frac{\theta}{2} + 90^{o} = 180^{o} \Rightarrow \theta = 60^{\circ}$$

Como as diagonais do losango se cortam ao meio, então AE = 2, pois AC = 4.

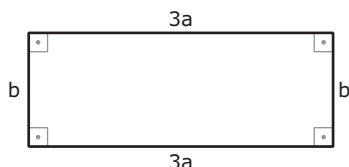
Do triângulo ABE, temos que:

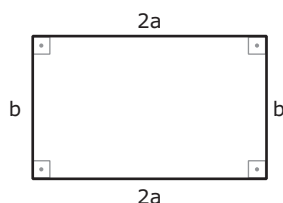
$$\cos\theta = \frac{AE}{\ell} \Rightarrow \cos 60^{o} = \frac{2}{\ell} \Rightarrow \ell = 4$$

Portanto, o lado do losango vale 4 cm.

Questão 20 – Letra E

Comentário: Sejam 6a e 2b as medidas, em centímetros, do comprimento e da largura, respectivamente, da folha retangular.

1° caso:

$2p = 6a + 2b \Rightarrow 42 = 6a + 2b \Rightarrow 3a + b = 21$

2° caso:

$2p = 4a + 2b \Rightarrow 34 = 4a + 2b \Rightarrow 2a + b = 17$

Resolvendo o sistema $\begin{cases} 3a + b = 21 \\ 2a + b = 17 \end{cases}$, temos que a = 4 e b = 9.

Logo, as dimensões do retângulo são 6a = 6.4 = 24 cm e 2b = 2.9 = 18 cm.

Portanto, o módulo da diferença das dimensões da folha é: |24 – 18| = 6 cm

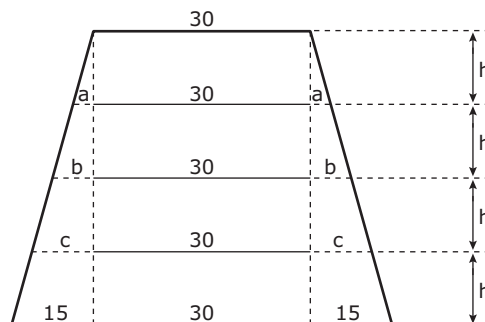
Seção Enem

Questão 01 – Letra D

Eixo cognitivo: IV

Competência de área: 2

Habilidade: 9

Comentário: Seja a seguinte figura com seus dados.

Como temos uma escada trapezoidal com 5 degraus paralelos e duas retas transversais, então, pelo Teorema de Tales, temos que:

$$\frac{a}{15} = \frac{h}{4h} \quad a = \frac{15}{4}$$

$$\frac{b}{15} = \frac{2h}{4h} \quad b = \frac{30}{4}$$

$$\frac{c}{15} = \frac{3h}{4h} \quad c = \frac{45}{4}$$

Assim, o comprimento mínimo de **x** é:

$x = 2a + 2b + 2c + 180 \Rightarrow$

$$x = 2\left(\frac{15}{4} + \frac{30}{4} + \frac{45}{4}\right) + 180 \Rightarrow x = 225$$

Portanto, para construir a escada é necessária uma peça de madeira cujo comprimento mínimo é de 225 cm.

Questão 02 – Letra D

Eixo cognitivo: III

Competência de área: 2

Habilidade: 8

Comentário: Como a área do retângulo menor (1) vale 4% da área do retângulo maior (2), então temos que:

$A_1 = 4\%.A_2 \Rightarrow x.26 = 0{,}04.260.400 \Rightarrow x = 160$ mm

Questão 03 – Letra C

Eixo cognitivo: II

Competência de área: 2

Habilidade: 7

Comentário: Como o cesto tem faces laterais no formato de retângulos e trapézios isósceles, então podemos eliminar as alternativas A, B e E. Concluímos do enunciado da questão que o fundo do cesto tem o formato de um quadrado. Logo, a alternativa correta é a letra C, pois o fundo do cesto da alternativa D tem o formato de um retângulo.

Questão 04 – Letra B

Eixo cognitivo: IV

Competência de área: 2

Habilidade: 9

Comentário: A área e o perímetro de um quadro de dimenções 25 cm x 50 cm valem, respectivamente:

$A_1 = 0{,}25.0{,}50 = 0{,}125\ m^2$ e $2p_1 = 2(0{,}25 + 0{,}50) = 1{,}5\ m$

Como o custo por m² vale R\$ 20, por metro linear vale R\$ 15 e a taxa de entrega vale R\$ 10, o custo, em reais, para 8 desses quadros vale:

$C_1 = 8(0{,}125.20 + 1{,}5.15) + 10 = 210$

Já a área e o perímetro de um quadrado de dimensões 50 cm x 100 cm valem, respectivamente:

$A_2 = 0{,}50.1 = 0{,}5\ m^2$ e $2p_2 = 2(0{,}5 + 1) = 3\ m$

Logo, o custo, em reais, para 8 desses quadros vale:

$C_2 = 8(0{,}5.20 + 3.15) + 10 = 450$

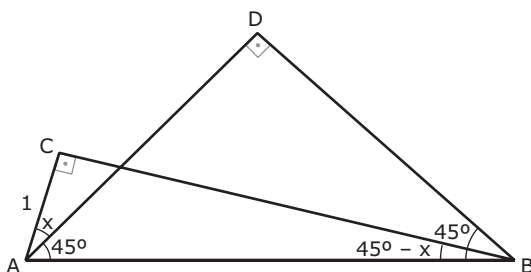
Portanto, $C_2 > 2.C_1$.

MÓDULO – E 05

Funções soma e fatoração

Exercícios de Fixação

Questão 01 – Letra C

Comentário: Considere a figura a seguir com seus dados.

Por hipótese, AD = BD. Então, $D\hat{A}B = D\hat{B}A = 45º$.

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo ACB, temos:

$AB^2 = AC^2 + BC^2 \Rightarrow AB^2 = 1^2 + 7^2 \Rightarrow AB = 5\sqrt{2}$ cm

No triângulo ABC, temos que:

sen (x + 45º) = sen x.cos 45º + sen 45º.cos x

$\frac{7}{5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.(\text{sen } x + \cos x) \Rightarrow \frac{7}{5} = \text{sen } x + \cos x$ e

cos (x + 45º) = cos x.cos 45º – sen x.sen 45º ⇒

$\frac{1}{5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.(\cos x - \text{sen } x) \Rightarrow \frac{1}{5} = \cos x - \text{sen } x$

Resolvendo o sistema $\begin{cases} \text{sen } x + \cos x = \frac{7}{5} \\ -\text{sen } x + \cos x = \frac{1}{5} \end{cases}$, temos que sen x = $\frac{3}{5}$.

Questão 02 - Letra D

Comentário:

I) Falso. Pois, sen (a+b) = sen a.cos b + sen b.cos a.

II) Verdadeiro.

III) Verdadeiro.

IV) Falso. Contraexemplo $\text{sen } \frac{\pi}{2}.\frac{\pi}{2} \neq \text{sen } \frac{\pi}{2}.\text{sen } \frac{\pi}{2}$.

Portanto, como as afirmativas II e III são verdadeiras, a alternativa procurada é a D.

Questão 03 – Letra C

Comentário:

Reescrevendo a função dada, temos:

$f(x) = \cos^2 x - \text{sen}^2 x \Rightarrow f(x) = \cos 2x$

Logo, seu período **p** será dado por:

$p = \frac{2\pi}{2} \quad p = \pi$

Questão 04 – Letra C

Comentário:

$\text{tg } x = \text{tg } \left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) \quad \text{tg } x = \frac{\text{tg } \frac{x}{2} + \text{tg } \frac{x}{2}}{1 - \text{tg } \frac{x}{2}.\text{tg } \frac{x}{2}}$

$\text{tg } x = \frac{2.\text{tg } \frac{x}{2}}{1 - \text{tg}^2 \frac{x}{2}} \xrightarrow{\text{tg } \frac{x}{2} = 2} \text{tg } x = \frac{2.2}{1 - (2)^2} = -\frac{4}{3}$

Questão 05 – Letra A

Comentário:

$\text{sen } x + \cos x = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow (\text{sen } x + \cos x)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 \Rightarrow$

$\text{sen}^2 x + 2.\text{sen } x.\cos x + \cos^2 x = \frac{1}{3} \Rightarrow$

$1 + \text{sen } (2x) = \frac{1}{3} \Rightarrow \text{sen } (2x) = -\frac{2}{3}$

Exercícios Propostos

Questão 02 – Letra B

Comentário:

$\frac{\text{sen } 34°.\cos 26° + \text{sen } 26°.\cos 34°}{\cos 57°.\cos 27° + \text{sen } 57°.\text{sen } 27°} = \frac{\text{sen } (34° + 26°)}{\cos (57° + 27°)} =$

$\frac{\text{sen } 60°}{\cos 30°} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 1$

MATEMÁTICA

Questão 03 – Letra E

Comentário:

$4.\text{sen } x.\cos x.\cos 2x = 2.2.\text{sen } x.\cos x.\cos 2x \Rightarrow$

$4.\text{sen } x.\cos x.\cos 2x = 2.\text{sen } 2x.\cos 2x = \text{sen } 4x$

Para $x = \frac{\pi}{16}$, temos que $\text{sen}\left(4.\frac{\pi}{16}\right) = \text{sen } \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Questão 04 – Letra D

Comentário:

$\cos 2\alpha = 2.\cos^2 \alpha - 1$

Para $\alpha = \frac{x}{2}$, temos que:

$\cos x = 2.\cos^2 \frac{x}{2} - 1 = 2.\left(\frac{3}{4}\right)^2 - 1 = \frac{1}{8}$

Questão 05 – Letra E

Comentário:

$(\text{sen } x + \cos x)^2 = \left(\frac{1}{n}\right)^2 \Rightarrow$

$\text{sen}^2 x + 2.\text{sen } x.\cos x + \cos^2 x = \frac{1}{n^2} \Rightarrow 1 + \text{sen } 2x = \frac{1}{n^2} \Rightarrow$

$1 - \frac{24}{25} = \frac{1}{n^2} \Rightarrow n^2 = 25 \Rightarrow n = 5$, pois $n > 0$

Questão 13 – Letra D

Comentário:

$f(x) = \cos 4x.\cos 2x + \text{sen } 4x.\text{sen } 2x \Rightarrow f(x) = \cos(4x - 2x) \Rightarrow$
$f(x) = \cos(2x)$

Logo, seu período **p** será dado por:

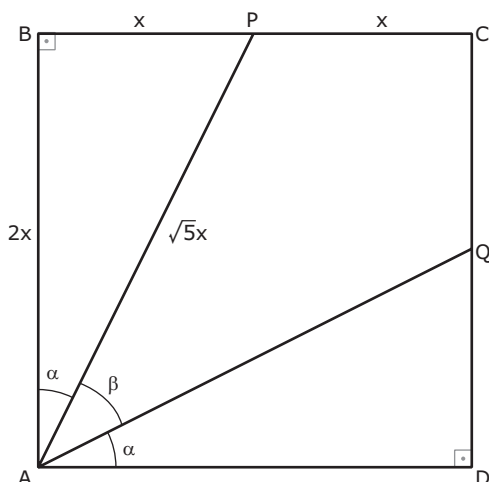
$p = \frac{2\pi}{2} \quad p = \pi$

Questão 14 – Letra B

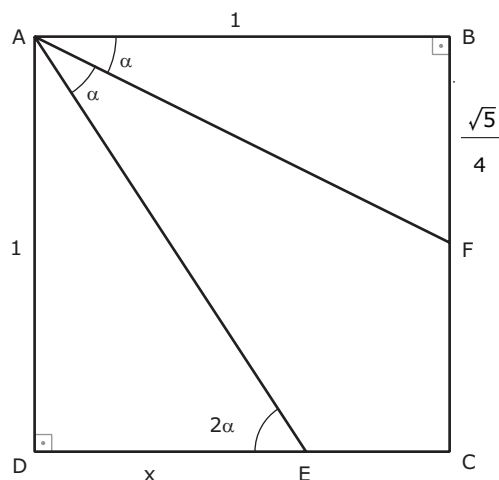
Comentário: Considere a figura a seguir com seus dados.

$\text{sen } \beta = \text{sen}(90^\circ - 2\alpha) \Rightarrow$

$\text{sen } \beta = \text{sen } 90^\circ.\cos 2\alpha - \text{sen } 2\alpha.\cos 90^\circ \Rightarrow$

$\text{sen } \beta = 1.(\cos^2 \alpha - \text{sen}^2 \alpha) \Rightarrow \text{sen } \beta = \left(\frac{2x}{\sqrt{5}x}\right)^2 - \left(\frac{x}{\sqrt{5}x}\right)^2 \Rightarrow$

$\text{sen } \beta = \frac{4}{5} - \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$

Questão 15 – Letra D

Comentário: Considere a figura a seguir com seus dados.

No triângulo ADE, temos:

$\text{tg } 2\alpha = \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{2.\text{tg } \alpha}{1 - \text{tg}^2 \alpha} = \frac{1}{x}$

No triângulo ABF, temos:

$\text{tg } \alpha = \frac{\sqrt{5}}{4}$

Logo:

$\text{tg } 2\alpha = \frac{2.\frac{\sqrt{5}}{4}}{1 - \left(\frac{\sqrt{5}}{4}\right)^2} = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{11\sqrt{5}}{40}$

MÓDULO – E 06

Equações e inequações trigonométricas

Exercícios de Fixação

Questão 01 – Letra B

Comentário: Os gráficos das funções **f** e **g** vão se interceptar quando $f(x) = g(x)$. Daí:

$f(x) = g(x) \Rightarrow 1 + \text{sen}(2x) = 1 + 2.\cos(x) \Rightarrow$

$2.\text{sen } x.\cos x = 2.\cos x \Rightarrow 2.\cos x(\text{sen } x - 1) = 0 \Rightarrow$

$\cos x = 0$ ou $\text{sen } x - 1 = 0$

$\cos x = 0 \quad x = \frac{\pi}{2}$ ou $x = \frac{3\pi}{2}$

ou

$\text{sen } x = 1 \quad x = \frac{\pi}{2}$

Portanto, para $x \in [0, 2\pi)$, temos dois pontos, sendo eles $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{3\pi}{2}$, em que os gráficos das funções **f** e **g** se cruzam.

Questão 02 – Letra C

Comentário: O ponto P(a, b), que representa a intersecção dos gráficos, ocorre quando f(x) = g(x). Logo,

$f(x) = g(x) \Rightarrow \text{sen } x = \text{sen } 2x \Rightarrow \text{sen } x = 2.\text{sen } x.\cos x \Rightarrow$

$2.\text{sen } x.\cos x - \text{sen } x = 0 \Rightarrow$

$$\text{sen}\,x\,(2.\cos x - 1) = 0 \quad \begin{matrix} \text{sen}\,x = 0 \\ \text{ou} \\ 2.\cos x - 1 = 0 \end{matrix}$$

1º caso: $\text{sen } x = 0 \Rightarrow \text{tg } x = 0 \Rightarrow \text{tg}^2 x = 0$

2º caso: $2.\cos x - 1 = 0 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{sen } x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

Logo:

$\text{tg } x = \pm\sqrt{3} \Rightarrow \text{tg}^2 x = 3$

Questão 03 – Letra C

Comentário: A altura de 2,5 m foi atingida quando f(x) = 2,5. Logo:

$$f(x) = 4 + 3.\cos\frac{\pi x}{6} \qquad 2,5 = 4 + 3.\cos\frac{\pi x}{6}$$

$$\cos\frac{\pi x}{6} = -\frac{1,5}{3} \qquad \cos\frac{\pi x}{6} = -\frac{1}{2}$$

Logo:

$$\frac{\pi x}{6} = \frac{2\pi}{3} \qquad x = 4$$

ou

$$\frac{\pi x}{6} = \frac{4\pi}{3} \qquad x = 8$$

Questão 04 – Letra A

Comentário:

$\cos 3x.\cos 2x - \text{sen } 3x.\text{sen } 2x = 0 \Rightarrow \cos(3x + 2x) = 0 \Rightarrow$

$\cos(5x) = 0;\ x \quad 0, \frac{2\pi}{5}$

Analisando os casos possíveis, temos:

1º caso: $5x = \frac{\pi}{2} \qquad x = \frac{\pi}{10}$

2º caso: $5x = \frac{3\pi}{2} \qquad x = \frac{3\pi}{10}$

3º caso: $5x = \frac{5\pi}{2} \qquad x = \frac{\pi}{2}$ não convém pois $x \quad 0, \frac{2\pi}{5}$

Portanto, a equação possui duas raízes.

Questão 05 – Letra A

Comentário: Por definição de módulo, temos:

$|\cos x| < \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} < \cos x < \frac{1}{2} \Rightarrow$

$\frac{\pi}{3} < x < \frac{2\pi}{3}$ ou $\frac{4\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{3}$

Portanto, para $0 < x < 2\pi$, temos que o conjunto solução de $|\cos x| < \frac{1}{2}$ é $\frac{\pi}{3} < x < \frac{2\pi}{3}$ ou $\frac{4\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{3}$.

Exercícios Propostos

Questão 02 – Letra B

Comentário:

$$\sqrt{3}.\text{sen}\,x + \cos x = k - 2 \qquad \frac{\sqrt{3}}{2}.\text{sen}\,x + \frac{1}{2}\cos x = \frac{k-2}{2}$$

$$\cos 30°.\text{sen}\,x + \text{sen}\,30°.\cos x = \frac{k-2}{2} \qquad \text{sen}\,(x + 30°) = \frac{k-2}{2}$$

Para que a equação possua solução, temos:

$$-1 \le \frac{k-2}{2} \le 1 \qquad -2 \le k - 2 \le 2 \qquad 0 \le k \le 4$$

Logo, o maior valor possível para **k** é 4.

Questão 04 – Letra B

Comentário:

$$\cos\ x - \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \quad \begin{matrix} x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} & x = \frac{\pi}{2} \\ x - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{3} & x = \frac{11\pi}{6} \end{matrix}$$

Questão 06 – Letra A

Comentário: $2.\text{sen } x.\cos x = 4 \Rightarrow \text{sen } 2x = 4$

Como sen α é sempre menor ou igual a 1 para todo $\boldsymbol{\alpha}$, então o número de soluções da equação sen 2x = 4 é zero.

Questão 08 – Letra C

Comentário:

$2.\cos^2\theta - 3.\cos\theta + 1 = 0,\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$

$\Delta = b^2 - 4.a.c = (-3)^2 - 4.2.1 = 9 - 8 = 1$

$$\cos\theta = \frac{3 \pm 1}{4} \quad \begin{matrix} \cos\theta = 1 & \theta = 0 & \text{sen}\,\theta = 0 \\ \cos\theta = \frac{1}{2} & \theta = \frac{\pi}{3} & \text{sen}\,\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{matrix}$$

Questão 13 – Letra E

Comentário:

$\operatorname{sen}^3 x - 2.\operatorname{sen}^2 x - 5.\operatorname{sen} x + 6 = 0 \Rightarrow$

$\operatorname{sen}^3 x - \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x - 6.\operatorname{sen} x + 6 = 0 \Rightarrow$

$\operatorname{sen}^2 x (\operatorname{sen} x - 1) - \operatorname{sen} x (\operatorname{sen} x - 1) - 6.(\operatorname{sen} x - 1) = 0 \Rightarrow$

$(\operatorname{sen} x - 1).(\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x - 6) = 0$

Logo:

$\operatorname{sen} x - 1 = 0 \qquad \operatorname{sen} x = 1$

ou

$\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x - 6 = 0 \qquad \operatorname{sen} x = -2 \text{ ou } \operatorname{sen} x = 3$

(nenhum dos valores convém, pois $-1 \le \operatorname{sen} x \le 1$)

Portanto:

$\operatorname{sen} x = 1 \qquad x = \frac{\pi}{2} \text{ e } x = \frac{5\pi}{2}, \text{ pois } x \quad 0, 4\pi$

$\frac{\pi}{2} + \frac{5\pi}{2} = 3\pi$

Questão 14 – Letra A

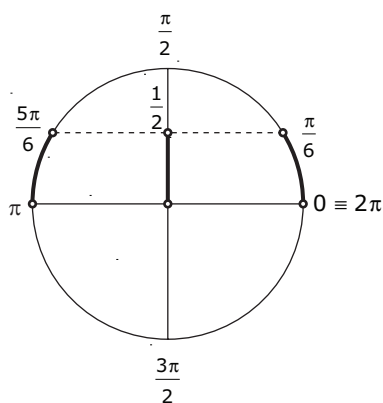
Comentário:

$\cos \quad 3x - \frac{\pi}{4} \quad = 0 \qquad 3x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \qquad 3x = \frac{3\pi}{4}$

$x = \frac{\pi}{4}, \text{ para } 0 \le x \le \frac{\pi}{2}$

Questão 15 – Letra E

Comentário:

$\left|\operatorname{sen} x - \frac{1}{4}\right| < \frac{1}{4} \Rightarrow -\frac{1}{4} < \operatorname{sen} x - \frac{1}{4} < \frac{1}{4} \Rightarrow 0 < \operatorname{sen} x < \frac{1}{2}$

Portanto, $S = \quad x \quad | \, 0 < x < \frac{\pi}{6} \text{ ou } \frac{5\pi}{6} < x < \pi \quad .$

MÓDULO – E 07

Sistema cartesiano e ponto

Exercícios de Fixação

Questão 01 – Letra B

Comentário: A inclinação da reta AB é $a_{\overleftrightarrow{AB}} = \frac{4-0}{3-0} \Rightarrow a_{\overleftrightarrow{AB}} = \frac{4}{3}$.

Como o segmento AB $\perp$ AD, então:

$a_{\overleftrightarrow{AB}}.a_{\overleftrightarrow{AD}} = -1 \Rightarrow \frac{4}{3}.a_{\overleftrightarrow{AD}} = -1 \Rightarrow a_{\overleftrightarrow{AD}} = -\frac{3}{4}$

Daí, a equação da reta AD é:

$y - 0 = -\frac{3}{4}(x - 0) \Rightarrow y = -\frac{3}{4}x$

Como D(a, b) $\in \overleftrightarrow{AD}$, então $b = -\frac{3}{4}a$.

Assim, D $\quad a, -\frac{3}{4}a \quad$.

A distância de **A** até **B** é:

$d(A, B) = \sqrt{(4-0)^2 + (3-0)^2} \Rightarrow d(A, B) = \sqrt{16+9} \Rightarrow d(A, B) = 5$

Como ABCD é um quadrado, então:

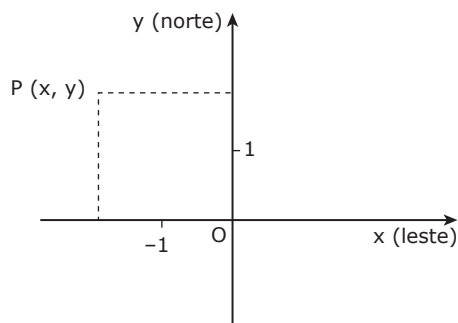
$d(A, D) = 5 \Rightarrow \sqrt{(a-0)^2 + \quad -\frac{3}{4}a - 0 \quad ^2} = 5 \Rightarrow$

$a^2 + \frac{9}{16}a^2 = 25 \Rightarrow \frac{25a^2}{16} = 25 \Rightarrow a^2 = 16 \Rightarrow a = \pm 4$

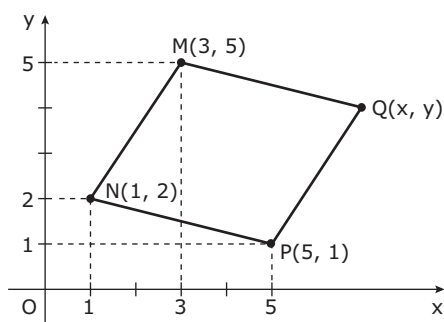
Como $a < 0$, então $a = -4$ e $b = -\frac{3}{4}(-4) \Rightarrow b = 3$.

Portanto, as coordenadas do vértice **D** são D(−4, 3) e, assim, −4 + 3 = −1.

Questão 02 – Letra B

Comentário: De acordo com a geometria da situação, podemos extrair a seguinte figura.

Portanto, edificações que forem construídas a mais de um quilômetro a oeste e a mais de um quilômetro ao norte estarão no segundo quadrante.

Questão 03 – Letra A

Comentário: Considere a figura a seguir com seus dados:

Como MNPQ é um paralelogramo, então MN // PQ, MN = PQ, NP // MQ e NP = MQ.

A inclinação da reta MN é $a_{\overleftrightarrow{MN}} = \frac{5-2}{3-1} \Rightarrow a_{\overleftrightarrow{MN}} = \frac{3}{2}$.

Como MN // PQ, então $a_{\overleftrightarrow{PQ}} = \frac{3}{2}$.

A equação da reta PQ é:

$$y - 1 = \frac{3}{2}(x - 5) \Rightarrow y = \frac{3}{2}x - \frac{13}{2}$$

A inclinação da reta NP é $a_{\overleftrightarrow{NP}} = \frac{2-1}{1-5} \Rightarrow a_{\overleftrightarrow{NP}} = -\frac{1}{4}$.

Como NP // MQ, então $a_{\overleftrightarrow{MQ}} = -\frac{1}{4}$.

A equação da reta MQ é:

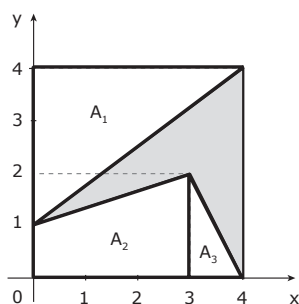
$$y - 5 = -\frac{1}{4}(x - 3) \Rightarrow y = -\frac{x}{4} + \frac{23}{4}$$

Como $Q = \overleftrightarrow{MQ} \cap \overleftrightarrow{PQ}$, então:

$$-\frac{x}{4} + \frac{23}{4} = \frac{3}{2}x - \frac{13}{2} \Rightarrow x = 7 \text{ e } y = -\frac{7}{4} + \frac{23}{4} \Rightarrow y = 4$$

Portanto, Q(7, 4).

Questão 04 – Letra A

Comentário: A área **S** sombreada será dada por:

$$S = 4^2 - A_1 - A_2 - A_3 = 16 - \frac{4.3}{2} - \frac{(2+1).3}{2} - \frac{1.2}{2} = 4{,}5$$

Questão 05 – Letra E

Comentário: Estabelecendo um eixo de coordenadas cartesianas com origem no canto inferior esquerdo do mapa, podemos escrever os pontos **A**, **B** e **C** como:

A(1, 5)

B(12, 0)

C(9, 3)

A distância percorrida pelo avião, no mapa, será dada por:

$$d(A, C) + d(C, B) =$$

$$\sqrt{(9-1)^2 + (3-5)^2} + \sqrt{(9-12)^2 + (3-0)^2} =$$

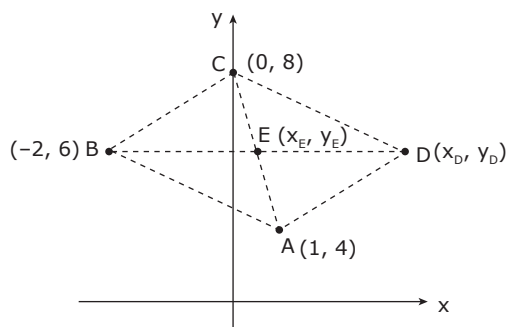
$$\sqrt{68} + \sqrt{18} \quad 8{,}3 + 4{,}2 = 12{,}5\,\text{cm}$$

Logo, a distância real percorrida será:

12,5.100 = 1 250 km

Exercícios Propostos

Questão 01 – letra B

Comentário: De acordo com o enunciado, temos:

Em que **D** é o quarto vértice e **E**, o ponto de encontro das diagonais. O ponto **E** é o ponto médio de AC e de BD, logo:

$$x_E = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$$

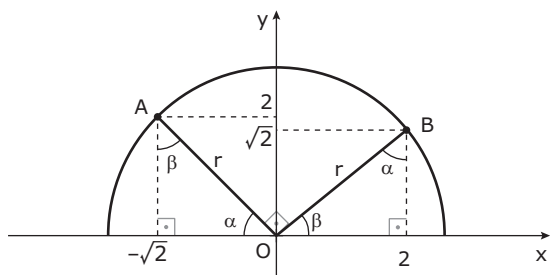
$$y_E = \frac{8+4}{2} = 6$$

$$x_E = \frac{x_D - 2}{2} = \frac{1}{2} \qquad x_E = 3$$

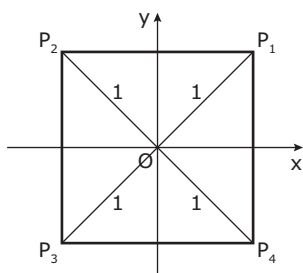
$$y_E = \frac{y_D + 6}{2} = 6 \qquad y_E = 6$$

Então, a soma das coordenadas do quarto vértice é 3 + 6 = 9.

Questão 02 – Letra A

Comentário: Considere a figura a seguir com seus dados.

Por congruência de triângulos, temos $B(2, \sqrt{2})$.

Questão 04 – Letra D

Comentário: Considere a figura a seguir com seus dados.

$$d = 1 \Rightarrow \ell = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \begin{matrix} P_1\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), P_2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \\ P_3\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right), P_4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \end{matrix}$$

Questão 08 – Letra B

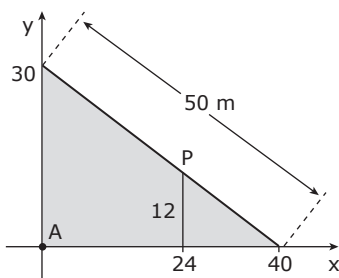
Comentário: Sejam P(2, 1) e Q(4, y), com y > 0. Então:

$$\left(\sqrt{(4-2)^2 + (y-1)^2}\right)^2 = (y)^2 \Rightarrow$$

$$4 + y^2 - 2y + 1 = y^2 \Rightarrow y = \frac{5}{2}$$

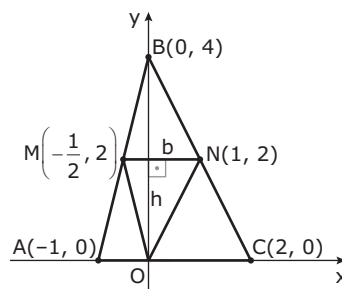
Portanto, $Q\left(4, \frac{5}{2}\right)$.

Questão 09 – Letra C

Comentário: Como o perímetro da praça é 120 m e as duas pessoas percorreram distâncias iguais, cada um percorrerá 60 m. Logo:

$P(24, 12); A(0, 0)$

$$d(P, A) = \sqrt{(24, 0)^2 + (12 - 0)^2} = 12\sqrt{5} \quad 27$$

Questão 13 – Letra D

Comentário: Considere a figura a seguir com seus dados.

$$b = 1 - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}$$

$$h = 2$$

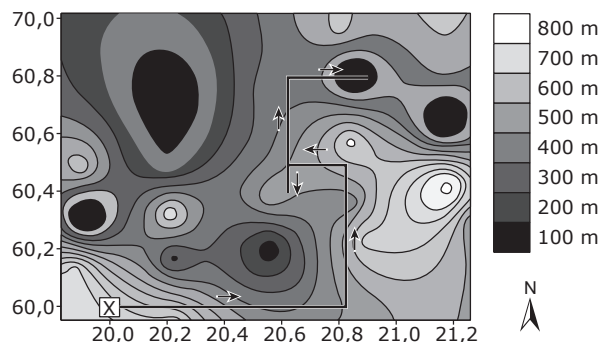
$$S = \frac{\frac{3}{2}.2}{2} = \frac{3}{2}$$

Seção Enem

Questão 01 – Letra A

Eixo cognitivo: I

Competência de área: 2

Habilidade: 6

Comentário:

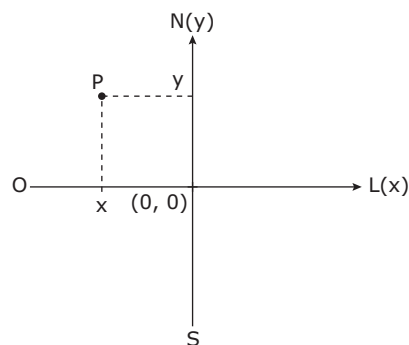
Portanto, de acordo com a escala de tons apresentadas, conclui-se que o helicóptero pousou em um local cuja altitude é menor ou igual a 200 m.

Questão 02 – Letra B

Eixo cognitivo: I

Competência de área: 2

Habilidade: 6

Comentário: O mapa da cidade é construído no seguinte sistema cartesiano:

Logo, temos que $\begin{cases} x < -1 \\ y > 1 \end{cases}$ P(x, y) 2º quadrante.

Questão 03 – Letra B

Eixo cognitivo: I

Competência de área: 2

Habilidade: 6

Comentário:

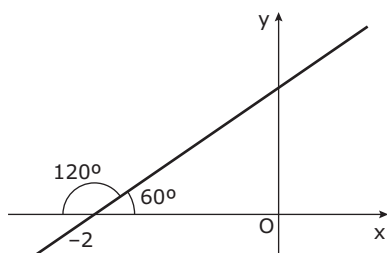
- Como, no eixo x, a coordenada é 6 e o foguete se deslocou 2 km para frente, a nova coordenada passa a ser 8;
- Como, no eixo y, a coordenada é 6 e o foguete se deslocou 3 km para trás, a nova coordenada passa a ser 3;
- Como, no eixo z, a coordenada é 7 e o foguete se deslocou 11 km para frente, a nova coordenada passa a ser 18;
- Logo, o foguete atingiu a posição (8, 3, 18).

MÓDULO – E 08

Estudo analítico da reta

Exercícios de Fixação

Questão 01 – Letra D

Comentário: Considere a figura a seguir com seus dados.

A inclinação da reta pode ser determinada da seguinte forma:

$a = \text{tg } 60^\circ \Rightarrow a = \sqrt{3}$

Como a reta passa pelo ponto (–2, 0), e sua inclinação é $\sqrt{3}$, então:

$y - 0 = \sqrt{3}(x + 2) \Rightarrow y = \sqrt{3}x + 2\sqrt{3}$

Portanto, a equação reduzida da reta é $y = \sqrt{3}x + 2\sqrt{3}$.

Questão 02 – Letra E

Comentário: Como o ponto (–2, a) pertence à função quadrática $y = x^2 - 1$, então:

$a = (-2)^2 - 1 \Rightarrow a = 3$

As raízes da função $y = x^2 - 1$ são:

$0 = x^2 - 1 \Rightarrow x = \pm 1$

Daí, deduzimos que a reta **r**, além de passar no ponto (–2, 3), também passa no ponto (1, 0).

Logo, temos dois pontos por onde a reta passa. Então, conseguimos determinar sua equação. Assim:

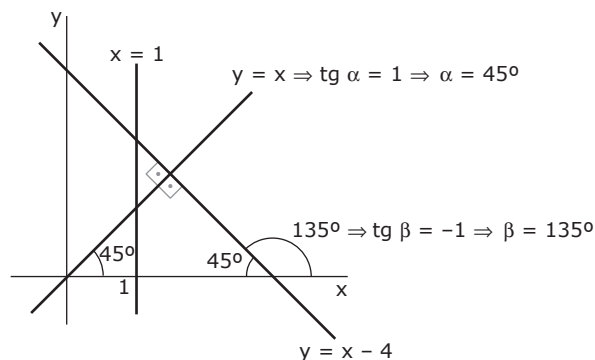
$a = \dfrac{3 - 0}{-2 - 1} \Rightarrow a = -1$ e

$y - 0 = -1(x - 1) \Rightarrow x + y - 1 = 0$

Portanto, a equação da reta **r** é $x + y - 1 = 0$.

Questão 03 – Letra D

Questão 04 – Letra A

$r \cap s \quad \begin{cases} 2x - 5y + 7 = 0 \\ 2x + y + 7 = 0 \end{cases}$

Subtraindo as equações:

$-6y = 0 \quad y = 0$

$2x + 0 + 7 = 0 \quad x = -\dfrac{7}{2}$

Questão 05 – Letra B

A equação da reta **r** é do tipo f(x) = ax + b, logo

$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(-2) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} b = 1 \\ 0 = -2a + b \end{cases} \quad \begin{cases} b = 1 \\ a = \dfrac{1}{2} \end{cases} \quad r: y = \dfrac{1}{2}x + 1$

A equação da reta **s** é do tipo g(x) = mx + n, em que $m = \text{tg } 45^\circ \Rightarrow m = 1$. Logo:

$\begin{cases} g(x) = x + n \\ g(3) = 0 \end{cases} \quad 0 = 3 + n \quad n = -3 \quad y = x - 3$

A intersecção entre as retas **r** e **s** será:

$\dfrac{1}{2}x + 1 = x - 3 \quad x = 8.$

Logo, f(8) = g(8) = 5.

Portanto, a distância entre os pontos N_3 e **I** será dada por:

$\begin{cases} I(8,\ 5) \\ N_3(26,\ 29) \end{cases} \quad d(I,\ N) = \sqrt{(26 - 8)^2 + (29 - 5)^2} = 30$

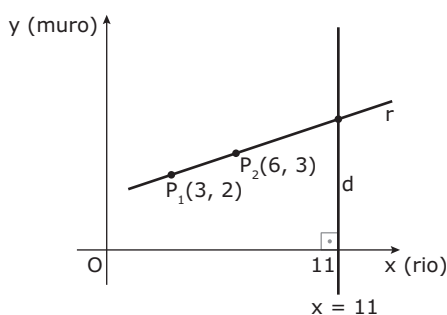
Exercícios Propostos

Questão 01 – Letra E

Comentário:

$P(-4, -4) \in r: y = ax + 1$

Então, $-4 = -4a + 1 \Rightarrow a = \dfrac{5}{4}$.

Questão 03 – Letra D

Comentário:

$m = \frac{y}{x} = \frac{3-2}{6-3} = \frac{1}{3}$

r: $y - 2 = \frac{1}{3}.(x - 3) \Rightarrow y = \frac{1}{3}x + 1$

Para x = 11, temos $y = \frac{1}{3}.11 + 1 \Rightarrow y = \frac{14}{3} \cong 4,67$.

Logo, como a malha quadriculada tem lados medindo 10 metros, d ≅ 46,7 m.

Questão 06 – Letra B

Comentário:

r: $m = tg\,45° = 1$; P(−1, 0)   r: $y - 0 = 1(x + 1)$ $y = x + 1$

s: $m = tg\,60° = \sqrt{3}$; Q(−1, 0)   s: $y - 0 = \sqrt{3}(x - 2)$ $y = \sqrt{3}x - 2\sqrt{3}$

r ∩ s:

$\sqrt{3}x - 2\sqrt{3} = x + 1$ $(\sqrt{3} - 1)x = 2\sqrt{3} + 1$

$x = \frac{2\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}.\frac{(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}+1)} = \frac{6 + 2\sqrt{3} + \sqrt{3} + 1}{3 - 1}$ $x = \frac{3\sqrt{3}+7}{2}$

Questão 09 – Letra E

Comentário:

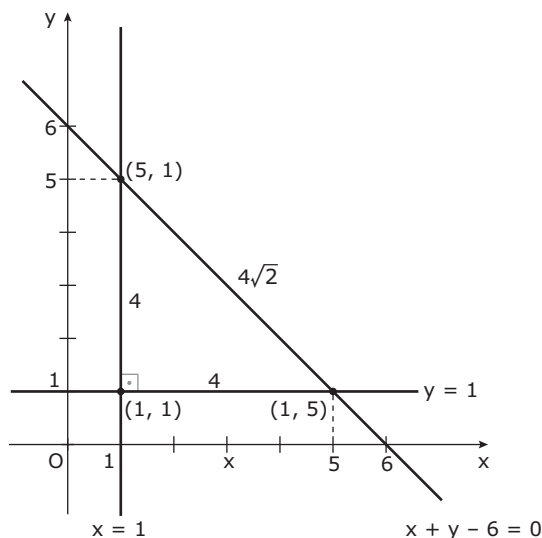
r ∩ s = {P}

$5x - 12y = 42$
$5x + 16y = 56$ $x = \frac{48}{5}$ e $y = \frac{1}{2}$

$P\left(\frac{48}{5}, \frac{1}{2}\right) \in$ t: 5x + 20y = m

Então, $m = 5.\frac{48}{5} + 20.\frac{1}{2} = 58$.

Questão 11 – Letra B

Comentário:

$2P = 4 + 4 + 4\sqrt{2} \Rightarrow 2P = 4(2 + \sqrt{2})$

Questão 13 – Letra A

Comentário:

m = tg 60º = $\sqrt{3}$; P(3, 2) ∈ r

r: $y - 2 = \sqrt{3}(x - 3) \Rightarrow y = \sqrt{3}x + 2 - 3\sqrt{3}$

Para x = 0, temos $y = 2 - 3\sqrt{3}$.

Seção Enem

Questão 01 – Letra B

Eixo cognitivo: II

Competência de área: 6

Habilidade: 24

Comentário: Somente os pontos B = (−3, 1), D = (0, 4) e E = (2, 6), dos itens, pertencem à reta de equação y = x + 4.

A distância do ponto **P** ao ponto **B** é:

$d_{P,B} = \sqrt{(x_P - x_B)^2 + (y_P - y_B)^2} = \sqrt{[-5 - (-3)]^2 + (5 - 1)^2}$

$d_{P,B} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20} < 5$

Portanto, a estação do metrô sendo criada no ponto B = (−3, 1) satisfaz a solicitação da comunidade.

Questão 02 – Letra C

Eixo cognitivo: II

Competência de área: 6

Habilidade: 24

Comentário: Observemos que a variação do lucro será maior quando o segmento de reta que compõe o gráfico for mais inclinado, uma vez que a quantidade **x** de produtos está variando de 100 em 100 unidades.

Logo, a maior variação do lucro ocorre quando **x** está entre 200 e 300 produtos vendidos.